ESAIM: CONTROL, OPTIMISATION AND CALCULUS OF VARIATIONS May 1997, VOL. 2, PP. 105–123
URL: HTTP://WWW.EMATH.FR/COCV/

UN RÉSULTAT D'EXISTENCE EN OPTIMISATION DE FORME EN UTILISANT UNE PROPRIÉTÉ GÉOMÉTRIQUE DE LA NORMALE

M. BARKATOU ET A. HENROT

RÉSUMÉ. Dans cet article nous prouvons un nouveau résultat d'existence pour une classe de problèmes d'optimisation de forme assez générale. Les ouverts que nous considérons possèdent une contrainte de nature géométrique sur la normale intérieure. Ce travail est motivé par la formulation variationnelle d'un problème à frontière libre dont la solution possède cette propriété géométrique.

1. INTRODUCTION

Les problèmes d'optimisation de forme, où il s'agit de trouver un ouvert de $\mathbb{R}^N$, par exemple, qui minimise un critère donné ont été beaucoup étudiés, en particulier en France, ces dernières années (voir par exemple le livre de O. Pironneau [15]). La question de l'existence d'une solution est souvent une question délicate et, dans la plupart des cas, il apparaît nécessaire de mettre des contraintes sur la classe d'ouverts considérés afin de pouvoir prouver l'existence d'un minimum en un sens classique. Citons dans cet esprit, le travail pionnier de D. Chenais [6] où on travaille avec des ouverts qui possèdent tous la propriété du ε-cône, c'est-à-dire qu'ils ont une régularité lipschitzienne uniforme. D'autres auteurs, comme D. Bucur et J.P. Zolesio plus récemment [4] ont affaibli cette hypothèse de régularité uniforme en la remplaçant par une hypothèse sur la capacité des points du bord de type Wiener. Dans un joli papier de 1993 [18], V. Šverak a montré qu'en dimension deux, on pouvait obtenir des résultats d'existence à condition de se placer dans la classe des ouverts dont le complémentaire a au plus m composantes connexes (où m est un entier fixé). Enfin, il est également possible de prouver des résultats d'existence sous des contraintes de type périmètre borné, voir par exemple [5].

Dans cet article on se propose de prouver l'existence d'une solution pour une large classe de problèmes d'optimisation de forme sous des contraintes de nature géométrique portant sur la normale intérieure au bord de l'ouvert (nous travaillerons avec des ouverts lipschitziens, donc dont le bord possède une normale presque partout). Plus précisément, on va se donner un convexe compact C et nous dirons qu'un ouvert Ω dont l'adhérence contient C

Mohammed Barkatou, Antoine Henrot : Université de Franche-Comté, Route de Gray, 25030 Besançon cedex France.
Email: barkatou@math.univ-fcomte.fr, henrot@math.univ-fcomte.fr.

Reçu par le journal le 2 avril 1996 et dans sa version révisée le 19 décembre 1996. Accepté pour publication le 17 février 1997.

possède la propriété géométrique de la normale relativement à C (notée en abrégé C-PGN) si la normale intérieure en tout point de $\partial\Omega$ rencontre C. On prouvera alors, dans la section 3, que la classe des ouverts Ω possédant la C-PGN est compacte pour la topologie de Hausdorff et ensuite, dans la section 4, que l'application $\Omega \longrightarrow u_\Omega$, où u_Ω est la solution du problème de Dirichlet suivant :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

avec $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, est continue pour la topologie de Hausdorff.

On en déduira un résultat d'existence pour un problème d'optimisation de forme classique.

L'idée d'utiliser une contrainte portant sur la normale intérieure comme la C-PGN n'a rien de gratuit et est directement inspirée de résultats de H. Shahgholian concernant le problème des surfaces de quadrature (ou problème de type Bernoulli) qui est le problème à frontière libre suivant. On se donne une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que support$(f) = C$ et on considère le problème : trouver un ouvert Ω contenant C et tel que le problème surdéterminé

$$(FL) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \\ |\nabla u| = \text{cst} = k & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

possède une solution. H. Shahgholian a montré dans [16] que si Ω est une solution régulière du problème (FL) alors Ω vérifie la propriété géométrique de la normale relativement à C. Comme, par ailleurs, le problème (FL) peut être classiquement résolu en minimisant la fonctionnelle

$$J(\Omega) = -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + k^2 vol(\Omega)$$

((FL) apparaît comme l'équation d'Euler, en utilisant la dérivation par rapport au domaine, du problème de minimisation, cf. section 5), l'idée de minimiser J sur la classe des ouverts possédant la C-PGN apparaît comme tout à fait naturelle pour résoudre le problème (FL).

2. Définitions et résultats préliminaires

Soit D une boule ouverte de $\mathbb{R}^N$ et C un convexe compact inclus dans D. Tous les ouverts Ω avec lesquels nous allons travailler seront connexes, inclus dans D et seront tels que $C \subset \bar{\Omega}$. Pour tout point x du bord d'un ouvert Ω, on notera $\nu(x)$ le vecteur normal intérieur à $\partial\Omega$ (s'il existe) et on introduit $\mathcal{N}_\Omega = \{x \in \partial\Omega : \nu(x) \; existe\}$. Enfin $D(x, \nu(x))$ désignera la demi-droite issue de x et de vecteur directeur $\nu(x)$.

DÉFINITION 2.1. On dit qu'un ouvert Ω vérifie la propriété géométrique de la normale relativement à C (ou, plus brièvement possède la C-PGN) si :

$$\begin{cases} \partial\Omega \setminus C & \text{est lipschitzien} \\ \forall x \in \mathcal{N}_\Omega \setminus C & D(x,\nu(x)) \cap C \neq \emptyset. \end{cases}$$

Rappelons maintenant différentes notions classiques de convergence sur les ouverts de $\mathbb{R}^N$, qui vont nous être utiles pour la suite. Tout d'abord, la convergence au sens de Hausdorff :

DÉFINITION 2.2. Soient K_1, K_2 deux compacts de D. On appelle distance de Hausdorff de K_1 et K_2 et on note $d_H(K_1, K_2)$ le nombre positif suivant :

$$d_H(K_1, K_2) = \max[\rho(K_1, K_2), \rho(K_2, K_1)]$$

où $\rho(K_i, K_j) = \max\limits_{x \in K_i} d(x, K_j)\ i, j = 1, 2$ et $d(x, Kj) = \min\limits_{y \in K_j} |x - y|$ où $|.|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$.

DÉFINITION 2.3. Soit Ω_n une suite d'ouverts de D et $\Omega \subset D$, soit K_n et K leurs complémentaires dans $\overline{D}$. On dit que Ω_n converge au sens de Hausdorff vers Ω et on note H- $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ si :

$$\lim_{n\to\infty} d_H(K_n, K) = 0.$$

La notion de convergence qui suit est moins classique, mais elle est très utile pour les questions de continuité par rapport au domaine de la solution de problèmes elliptiques (voir par exemple [10] ou [12]).

DÉFINITION 2.4. Soit Ω_n une suite d'ouverts de D et $\Omega \subset D$. On dit que Ω_n converge au sens des compacts vers Ω et on note K- $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ si :

(i) Pour tout compact K inclus dans Ω, on a $K \subset \Omega_n$ à partir d'un certain rang ;

(ii) Pour tout compact L inclus dans $\overline{\Omega}^c$ (l'extérieur de Ω), on a $L \subset \overline{\Omega_n}^c$ à partir d'un certain rang.

Rassemblons ci-dessous quelques résultats préliminaires élémentaires relatifs à la convergence de Hausdorff. Tout d'abord les deux propositions suivantes qui sont très classiques, voir par exemple [4] ou [15].

PROPOSITION 2.5. *L'ensemble des ouverts Ω inclus dans la boule D est compact pour la topologie de Hausdorff.*

PROPOSITION 2.6. *Si Ω_n est une suite d'ouverts de D et $\Omega \subset D$ tels que H- $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ alors :*

$$\begin{cases} (i)\ \forall\ K \text{ sous} - \text{ensemble compact de } \Omega \quad \exists n_K \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_K\ ,\ K \subset \Omega_n \\ (ii)\ \forall\ x \in \partial\Omega : \lim\limits_{n\to\infty} d(x, \partial\Omega_n) = 0. \end{cases}$$

La proposition 2.5 est évidemment très importante, puisqu'elle permet d'extraire de toute suite minimisante, pour une certaine fonctionnelle de forme, une sous-suite qui converge au sens de Hausdorff. En général, ce type de convergence n'est pas suffisant pour assurer la semi-continuité inférieure de la fonctionnelle et donc pour prouver l'existence d'un minimum. La contrainte géométrique que nous avons imposée ici va nous permettre de réaliser ce programme (cf. section 4).

En lisant un peu rapidement la définition de la C-PGN, on peut avoir l'impression qu'elle implique que l'ouvert Ω possède une propriété uniforme du cône. C'est vrai en ce qui concerne les points du bord de Ω situés en dehors de C comme on va le voir dans la proposition ci-dessous. Mais, en général, un ouvert possédant la C-PGN peut ne pas être lipschitzien en certains points comme le prouve un exemple du type $C = [-R, R] \times [-1, 0]$ (avec R assez grand) et Ω un ouvert limité supérieurement par le graphe de la fonction $\sqrt{|\sin(x)|}$. Cet exemple montre au passage que les ouverts Ω avec lesquels on travaille peuvent avoir des points de rebroussement à condition que ceux-ci soient situés sur C, cf. section 4 où on analysera de plus près les éventuels points de rebroussement de $\partial\Omega$.

PROPOSITION 2.7. *[Propriété uniforme du cône en dehors de C] Soit Ω un ouvert possédant la C-PGN et x_0 un point de $\partial\Omega \setminus C$. Alors il existe un vecteur unitaire η et un réel ε qui ne dépendent que de x_0 et de C (et qui sont donc indépendants de Ω) tels que*

$$\forall y \in B(x_0, \varepsilon) \cap \overline{\Omega} \qquad C(y, \eta, \varepsilon) \subset \Omega$$

où $C(y, \eta, \varepsilon)$ désigne le cône épointé de sommet y, de direction η et d'angle au sommet et de hauteur ε :

$$C(y, \eta, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^N ; 0 < |x - y| \leq \varepsilon \text{ et } |(x - y).\eta| \geq |x - y| \cos \varepsilon\}.$$

Démonstration. Commençons par fixer un repère lié à x_0 et à C, mais indépendant de Ω. Notons δ la distance de x_0 à C. On prend pour origine O la projection de x_0 sur C et pour dernier vecteur de coordonnées $\overrightarrow{e_N} = \overrightarrow{Ox_0}/\delta$ de sorte que $\{x_N = 0\}$ est un hyperplan d'appui à C en O. On complète alors la base en choisissant une base orthonormée de $\{x_N = 0\}$.

Une conséquence importante de la propriété géométrique de la normale est que le bord de Ω admet, au voisinage de x_0, une représentation lipschitzienne dans le repère $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2, \ldots, e_N)$ (pour le voir, on commence à regarder le cas où $\partial\Omega$ est C^1 et c'est alors une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites puis on raisonne par densité pour le cas lipschitzien ; cf. [2] pour plus de détails).

On notera donc φ une telle représentation lipschitzienne au voisinage de x_0 (on supposera dans ce qui suit $\alpha < \delta/2$) :

$$\partial\Omega \cap B(x_0, \alpha) = \{(x', x_N) \in B(x_0, \alpha); \;\; x_N = \varphi(x')\}$$

$$\Omega \cap B(x_0, \alpha) = \{(x', x_N) \in B(x_0, \alpha); \;\; x_N < \varphi(x')\}.$$

Soit enfin R un nombre positif suffisamment grand pour que l'intersection du cône de sommet y s'appuyant sur C avec l'hyperplan $x_N = 0$ soit contenu dans la boule ($N-1$-dimensionnelle) $B'(O,R)$ et ceci pour tout y dans la boule $B(x_0,\delta/2)$.

Commençons par caractériser analytiquement la propriété géométrique de la normale. Par définition de R, en tout point $\xi=(\xi',\xi_N)\in\partial\Omega\cap B(x_0,\alpha)$ où la normale ν_ξ existe, la demi-droite d'origine ξ dirigée par ν_ξ vient couper l'hyperplan $\{x_N=0\}$ à l'intérieur de la boule $B'(O,R)$ ce qui se traduit par :

$$\forall\xi\in\mathcal{N}_\Omega\cap B(x_0,\alpha);\qquad |\xi'+\varphi(\xi')\nabla\varphi(\xi')|\le R$$

ce qui implique en particulier que pour tout vecteur unitaire u' de $\mathbb{R}^{N-1}$:

$$-R\le\xi'.u'+\varphi(\xi')\nabla\varphi(\xi').u'\le R. \tag{2.1}$$

Soient alors y' et z' deux points distincts de la boule $N-1$-dimensionnelle $B'(O,\alpha)$ et notons u' le vecteur $\frac{z'y'}{|z'y'|}$. De (2.1) on tire, en posant $\xi'=y'+tu'$:

$$-R|z'y'|\le\int_0^{|z'y'|}(y'+tu').u'+\varphi(y'+tu')\nabla\varphi(y'+tu').u'\,dt\le R|z'y'|, \tag{2.2}$$

ce qui donne, après intégration

$$\begin{aligned}&\forall y',z'\in B'(O,\alpha)\\ &-2R|z'-y'|+|y'|^2-|z'|^2\le\varphi^2(z')-\varphi^2(y')\le 2R|z'-y'|+|y'|^2-|z'|^2\end{aligned} \tag{2.3}$$

En utilisant la relation (2.3) ci-dessus, on peut en déduire immédiatement que φ est uniformément lipschitzien sur $B'(O,\alpha)$ et donc vérifie une propriété uniforme du cône (cf. [7]), mais comme il n'est pas absolument évident que les caractéristiques géométriques du cône peuvent être choisies indépendamment de Ω, nous continuons la démonstration.

Fixons $\varepsilon>0$ suffisamment petit pour que

$$2\varepsilon+(1+\tan^2\varepsilon)\varepsilon+2\tan\varepsilon(R+\varepsilon)<\delta$$

(il est donc clair que ε ne dépend que de x_0 et de C, par l'intermédiaire de R et de δ) et choisissons comme direction du cône $\eta=-e_N$. Soit $y\in B(x_0,\varepsilon)\cap\overline{\Omega}$, y s'écrit donc $y=(y',\delta+y_N)$ avec

$$|y'|^2+y_N^2<\varepsilon^2\ \text{ et }\ \delta+y_N\le\varphi(y'). \tag{2.4}$$

Soit maintenant $z\in C(y,\eta,\varepsilon)$:

$$z=y+(h',-h_N)\ \text{ avec } |h'|^2+h_N^2<\varepsilon^2,\ |h'|\le(\tan\varepsilon)h_N \text{ et } h_N>0. \tag{2.5}$$

Il s'agit donc de prouver la propriété uniforme du cône, c'est-à-dire que $z\in\Omega$ ou encore que :

$$(\delta+y_N-h_N)^2<(\varphi(y'+h'))^2.$$

Or, d'après (2.3) on a

$$(\varphi(y'+h'))^2 \geq (\varphi(y'))^2 - 2R|h'| + |y'|^2 - |y'+h'|^2$$

d'où, en utilisant (2.4)

$$\begin{aligned}(\varphi(y'+h'))^2 &\geq (\delta + y_N)^2 - 2R|h'| + |y'|^2 - |y'+h'|^2 \\ &\geq (\delta + y_N)^2 - 2R|h'| - |h'|^2 - 2\varepsilon|h'|.\end{aligned}$$

On en déduit grâce à (2.5)

$$(\varphi(y'+h'))^2 \geq (\delta + y_N)^2 - 2(R+\varepsilon)\tan(\varepsilon)h_N - \tan^2(\varepsilon)h_N^2$$

si bien qu'en utilisant la définition de ε on obtient bien

$$(\varphi(y'+h'))^2 \geq (\delta + y_N)^2 + h_N^2 - 2h_N(\delta - \varepsilon) \geq (\delta + y_N - h_N)^2$$

ce qu'il fallait vérifier. □

On va déduire de cette proposition un résultat de convergence qui nous servira par la suite.

PROPOSITION 2.8. *Soit Ω_n une suite d'ouverts possédant la C-PGN et qui converge au sens de Hausdorff vers un ouvert Ω. Alors $K\text{-}\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ (au sens de la définition 2.4).*

Démonstration. On sait déjà, par la proposition 2.6 que pour tout compact $K \subset \Omega$, on a $K \subset \Omega_n$ à partir d'un certain rang. Il reste donc à démontrer une propriété analogue pour les compacts situés dans l'extérieur de Ω.

Soit L un compact, qu'on peut toujours supposer d'intérieur non vide, $L \subset \overline{\Omega}^c$ et soit Ω_n un éventuel ouvert de la suite tel que $\overline{\Omega}_n \cap L \neq \emptyset$.

Dans le cas où $L \subset \Omega_n$, on a évidemment $d_H(\Omega_n, \Omega) \geq \alpha$ où α est le rayon d'une boule incluse dans L et l'hypothèse que $d_H(\Omega_n, \Omega) \to 0$ prouve que ce cas ne peut se présenter qu'un nombre fini de fois.

Dans l'autre cas, on a $\partial\Omega_n \cap L \neq \emptyset$. Soit x un point de l'intersection. D'après la proposition 2.7, $\exists \varepsilon > 0$ et un vecteur unitaire η (tous deux indépendants de n) tels que le cône $C(x, \eta, \varepsilon)$ soit inclus dans Ω_n. Comme on peut toujours supposer ε assez petit pour que $C(x, \eta, \varepsilon) \cap \Omega = \emptyset$, on en déduit que la distance de Hausdorff $d_H(\Omega_n, \Omega) \geq \beta$ où β est le rayon d'une boule incluse dans le cône et, là encore l'hypothèse que $d_H(\Omega_n, \Omega) \to 0$ prouve que ce cas ne peut se présenter qu'un nombre fini de fois, ce qui termine la démonstration. □

REMARQUE 2.9. Dans le cas où tous les ouverts avec lesquels on travaille sont lipschitziens, il est possible de montrer la réciproque de cette proposition, à savoir que si $K\text{-}\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ alors il existe une sous suite extraite Ω_{n_k} de Ω_n telle que : $H\text{-}\lim_{n\to\infty} \Omega_{n_k} = \Omega$. Nous renvoyons à [2] pour les détails.

3. Un résultat de compacité

Fixons dans toute la suite D une (grande) boule de $\mathbb{R}^N$ qui contiendra le convexe compact C et tous les ouverts avec lesquels on va travailler. Notons $\mathcal{C}$ la classe des ouverts contenus dans D qui possèdent la C-PGN. D'après la proposition 2.5, on sait déjà que $\mathcal{C}$ est relativement compacte pour la convergence de Hausdorff. Il nous reste à prouver qu'elle est fermée, c'est-à-dire que si Ω_n est une suite d'ouverts de $\mathcal{C}$ qui converge au sens de Hausorff vers un ouvert Ω alors celui-ci possède aussi la propriété géométrique de la normale relativement à C, ce qui va nécessiter de montrer que

• Ω est lipschitzien (au moins en dehors de C)

• aux points où la normale intérieure existe, celle-ci rencontre C. Montrons d'abord le premier résultat :

Théorème 3.1. *Soit Ω_n une suite d'ouverts de D ayant la C-PGN et Ω un ouvert de D tels que : H-$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ alors $\partial\Omega \setminus C$ est lipschitzien.*

Démonstration. Soit x un point de $\partial\Omega \setminus C$, d'après le (ii) de la Proposition 2.6, il existe une suite de points $x_n \in \partial\Omega_n$ qui converge vers x. Quitte à composer avec une translation τ_n de vecteur $\overrightarrow{x_n x}$ tendant vers l'identité (et donc à considérer la suite d'ouverts $\widetilde{\Omega_n} = \tau_n(\Omega_n)$ qui converge aussi au sens de Hausdorff vers Ω), on peut toujours supposer que $x \in \partial\Omega_n, \quad \forall n$. Pour chaque n, $\partial\Omega_n$ admet, au voisinage de x, une représentation lipschitzienne par une fonction que l'on notera φ_n et ce dans un repère $(O, e_1, \ldots, e_N)$ où O est la projection de x sur C et e_N le vecteur unitaire $\frac{Ox}{|Ox|}$ (voir la démonstration de la proposition 2.7). De plus, d'après cette même proposition, tous les Ω_n vérifient une propriété uniforme du ε-cône au voisinage de x, avec un ε indépendant de n (il ne dépend que de x et de C). Il en résulte d'après un article de D. Chenais (cf. [7]) que l'on peut fixer une boule (fermée) $N-1$-dimensionnelle $B'(O,\alpha)$ sur laquelle toutes les fonction φ_n sont définies.

Reprenons maintenant l'inégalité (2.3) prouvée lors de la démonstration de la proposition 2.7. Elle fournit ici, pour tout $y', z' \in B'(O,\alpha)$:

$$|\varphi_n^2(y') - \varphi_n^2(z')| \leq \max(|-2R|z'-y'| + |y'|^2 - |z'|^2|, |2R|z'-y'| + |y'|^2 - |z'|^2|).$$

On peut toujours choisir α suffisamment petit pour que $\varphi_n(y')$ et $\varphi_n(z')$ soient supérieurs à $\delta/2$ (δ désigne la distance de x à C), et de l'inégalité ci-dessus on tire :

$$|\varphi_n(y') - \varphi_n(z')| \leq \frac{2R + 2\alpha}{\delta} |z' - y'|,$$

ce qui prouve que les fonctions φ_n sont uniformément lipschitziennes. On peut donc, grâce au théorème d'Ascoli, en extraire une sous-suite, encore notée φ_n qui converge uniformément vers une fonction φ elle aussi lipschitzienne. Il reste maintenant à prouver que φ est une représentation du bord de Ω au voisinage de x, c'est-à-dire que dans un voisinage $\mathcal{V}$ de x, on a :

$$\partial\Omega \cap \mathcal{V} = \{ (y', y_N) \in B'(O,\alpha) \times \mathbb{R} : \ y_N = \varphi(y') \} := Gra(\varphi)$$

$$\Omega \cap \mathcal{V} = \{ (y', y_N) \in B'(O, \alpha) \times \mathbb{R} : \ y_N \ < \ \varphi(y') \}.$$

Soit $y = (y', y_N)$ un point de $\partial\Omega \cap \mathcal{V}$. Par la proposition 2.6, on sait qu'il existe une suite de points $y^n = ((y^n)', y_N^n)$ appartenant à $\partial\Omega_n$ et convergeant vers y. Or $y_N^n = \varphi_n((y^n)')$ et donc par convergence uniforme de φ_n vers φ, on en déduit $y_N = \varphi(y')$, c'est-à-dire que $\partial\Omega \cap \mathcal{V} \subset Gra(\varphi)$. Pour l'inclusion inverse, on remarque que pour tout y' fixé dans $B'(O, \alpha)$, il n'existe qu'un seul point de $Gra(\varphi)$ « au-dessus »de y' et c'est donc nécessairement le point (y', y_N) qui appartient à $\partial\Omega \cap \mathcal{V}$.

Soit maintenant $y = (y', y_N) \in \Omega$. Toujours d'après la proposition 2.6, on sait que $y \in \Omega_n$ à partir d'un certain rang, donc $y_N < \varphi_n(y')$ et, en passant à la limite $y_N \leq \varphi(y')$. Mais l'égalité est impossible (sinon y serait un point de $\partial\Omega$ en vertu de ce qui précède), et donc $y_N < \varphi(y')$.

Enfin, soit $y = (y', y_N)$ avec $y_N < \varphi(y')$. On veut prouver que $y \in \Omega$. Si ce n'était pas le cas, alors ou bien on aurait $y \in \partial\Omega$ ce qui est impossible d'après ce qui précède, ou bien y serait dans l'extérieur de Ω. Mais alors on peut utiliser la proposition 2.8 (convergence compacte de Ω_n vers Ω) pour affirmer que $y \in \Omega_n$ à partir d'un certain rang ; ce qui se traduit par $y_N > \varphi_n(y')$ et, à la limite $y_N \geq \varphi(y')$ ce qui est impossible et qui achève la démonstration. □

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le résultat annoncé :

Théorème 3.2. *Soit Ω_n une suite d'ouverts de D ayant la C-PGN et Ω un ouvert de D tels que : H-$\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = \Omega$ alors Ω possède la C-PGN.*

Démonstration. Grâce au théorème précédent, il ne nous reste plus qu'à prouver que pour tout point de $\partial\Omega \setminus C$ où la normale existe (l'ensemble $\mathcal{N}_\Omega \setminus C$ que nous avons introduit au début), la normale intérieure vient rencontrer C. Cela va résulter du

Lemme 3.3. *Pour tout $x \in \mathcal{N}_\Omega \setminus C$ il existe une suite $z^n \in \mathcal{N}_{\Omega_n} \setminus C$ telle que :*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} z^n \ = \ x \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} \nabla\varphi_n((z^n)') \ = \ \nabla\varphi(x'). \end{cases}$$

Démonstration. Posons $x = (O', x_N)$ $(x_N \in \mathbb{R}_+^*)$ et supposons, par l'absurde, qu'il existe un $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et un voisinage $V_0 =]-\beta, \beta[^{N-1} \subset B'(O', \alpha)$ de O' tels que pour tout point $z' \in V_0 \cap \mathcal{N}_{\Omega_n} \setminus C$ on ait $\| \nabla\varphi_n(z') - \nabla\varphi(O') \| \geq N\varepsilon_0$. Ce qui se traduit par l'existence d'un indice $i \in \{1, ..., N-1\}$ tel que :

$$|\frac{\partial\varphi_n}{\partial y_i}(z') \ - \ \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(O')| \ \geq \varepsilon_0. \tag{3.1}$$

Posons alors $\varphi_n^i(t) \ = \ \varphi_n(y_1, .., y_{i-1}, t, y_{i+1}, .., y_{N-1})$. La suite φ_n^i converge évidemment uniformément vers $\varphi^i(t) := \varphi(y_1, .., y_{i-1}, t, y_{i+1}, .., y_{N-1})$. Comme ces fonctions sont lipschitziennes, la dérivée existe presque partout en t et de plus l'hypothèse (3.1) implique que pour presque tout t dans un voisinage de 0, on a

$$|(\varphi^i)'_n(t) \ - \ (\varphi^i)'(0)| \geq \varepsilon_0.$$

Supposons par exemple que $(\varphi^i)'_n(t) \geq (\varphi^i)'(0) + \varepsilon_0$. Par intégration entre 0 et s, on en déduit que

$$\varphi^i_n(0) - \varphi^i_n(s) \geq -s((\varphi^i)'(0) + \varepsilon_0)$$

et, en passant à la limite en n on aura

$$\varphi^i(0) - \varphi^i(s) \geq -s((\varphi^i)'(0) + \varepsilon_0).$$

En divisant par $s < 0$ et en faisant $s \to 0$, on obtient alors

$$\lim_{s \to 0, s<0} \frac{\varphi^i(s) - \varphi^i(0)}{s} \geq (\varphi^i)'(0) + \varepsilon_0$$

ce qui est absurde. □

On en déduit le Théorème en utilisant l'hypothèse que les normales à $\partial\Omega_n$ aux points z_n rencontrent C et le fait que celui-ci est fermé.

4. Un résultat de continuité par rapport au domaine

Dans ce paragraphe, nous allons nous placer en dimension $N \geq 3$, tout simplement parce que le résultat de continuité que nous cherchons à prouver est immédiat en dimension 2 en utilisant le théorème de Šverak (cf. [18]). En effet, il résulte de la définition qu'un ouvert possédant la C-PGN est simplement connexe et donc son complémentaire n'a qu'une seule composante connexe ce qui rend le théorème de Šverak applicable.

De manière générale, la convergence au sens de Hausdorff n'est pas suffisante, en dimension $N \geq 3$ (comme en dimension 2 d'ailleurs) pour assurer la continuité par rapport au domaine de la solution d'un problème aux limites, par exemple de type Dirichlet. Dans notre cas cependant, nous avons pu prouver (cf. Proposition 2.8) que, dans la classe des ouverts possédant la C-PGN, la convergence au sens de Hausdorff entraînait la convergence au sens des compacts qui est la bonne topologie pour les résultats de continuité par rapport au domaine (cf. [10] ou [12]). Ce n'est néanmoins pas suffisant *a priori* pour assurer le résultat de continuité désiré. Il faut en effet que le domaine limite ait un minimum de régularité (c'est la notion de stabilité au sens de Keldyš). Or si un domaine qui vérifie la C-PGN est lipschitzien en dehors de C, ce qui est plus que la régularité souhaitée, nous avons vu précédemment qu'il pouvait avoir des points de rebroussement pour les points de son bord qui sont situés sur ∂C. En un point de rebroussement, un ouvert Ω peut être ou ne pas être stable au sens de Keldyš, cela dépend de la forme géométrique du point de rebroussement et, en particulier, de la « quantité de matière »(en terme de capacité) contenue dans l'extérieur de Ω au voisinage du point de rebroussement. Il convient donc de faire une analyse fine et un calcul de capacité pour s'assurer, dans notre cas, que la C-PGN ne permet que des points de rebroussement « admissibles ». Auparavant, nous allons tout d'abord rappeler la notion de stabilité au sens de Keldyš et son lien avec la continuité par rapport au domaine de la solution de problèmes aux limites de type Dirichlet, pour plus de détails et aussi pour les démonstrations nous renvoyons à [10], [9] ou au travail original de Keldyš [12]. L'outil essentiel dans ces questions est la notion de capacité. Nous allons en redonner une définition, qui n'est peut-être pas la définition classique, en termes d'espaces de Sobolev, et qui est plutôt la définition utilisée dans la théorie du potentiel.

Soit E un ensemble borélien et μ une mesure positive dont le support est inclus dans E, on définit alors le potentiel associé à μ par

$$V_\mu(x) := \int_E \frac{d\mu(y)}{|y-x|^{N-2}}.$$

Ce potentiel V_μ est harmonique dans $\overline{E}^c$, superharmonique dans $\mathbb{R}^N$ et semi-continu inférieurement. On notera $\mu(E) =< \mu, 1 >$ la « masse totale »de la distribution μ et on a alors :

DÉFINITION 4.1. La capacité de E est le nombre noté $c(E)$ défini par $c(E) := \sup\{\mu(E), \mu$ mesure positive dont le support est inclus dans E telle que $V_\mu(x) \leq 1$ dans $\mathbb{R}^N\}$.

La définition précédente est équivalente (à une constante près) à la définition usuelle de la capacité dans $\mathbb{R}^N$ (pour un compact K, comme infimum de l'intégrale de Dirichlet pour des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$ supérieure ou égale à 1 sur K). Mais elle s'avère souvent plus pratique quand il s'agit d'obtenir une minoration de la capacité d'un ensemble E. En effet, et c'est ce que nous ferons un peu plus loin, pour minorer $c(E)$, il suffit d'exhiber un potentiel V_μ, associé à une mesure positive, qui est inférieur ou égal à 1 sur E (et donc sur $\mathbb{R}^N$), on a alors, par définition, $c(E) \geq \mu(E)$.

Une propriété qui est vraie en tout point sauf sur un ensemble de capacité nulle est dite vraie quasi-partout (abréviation q.p.).

Définissons maintenant la notion de point de stabilité, comme elle a été introduite par Keldyš dans [12].

DÉFINITION 4.2. Soit Ω un ouvert et x un point de son bord. On note E_n l'ensemble des points de l'extérieur de Ω dont la distance à x est comprise entre 2^{-n} et 2^{-n+1} :

$$E_n = \{y \in \overline{\Omega}^c, 2^{-n} \leq |x-y| \leq 2^{-n+1}\}. \tag{4.1}$$

On dit alors que x est un point de stabilité pour $\partial\Omega$ si la série numérique de terme général $2^{(N-2)n}c(E_n)$ est divergente.

Cette notion est évidemment très proche de la notion de régularité au sens de Wiener, qui intervient dans l'étude de la continuité au bord de la solution du problème de Poisson. La différence (importante) entre les deux définitions est que pour la régularité au sens de Wiener, c'est le complémentaire de Ω qui intervient dans la définition de E_n et non l'extérieur de Ω comme ici. Remarquons qu'il est classique que tous les points du bord d'un ouvert lipschitzien soient des points de stabilité.

Revenons maintenant à la question de la continuité par rapport au domaine de la solution d'un problème de Dirichlet. La question fondamentale, concernant la régularité d'un ouvert ω intervenant dans ce type de problème, est de savoir à quelle condition une fonction qui est nulle q.p. sur l'extérieur de ω est également nulle q.p. sur le complémentaire de ω, c'est-à-dire est dans $H_0^1(\omega)$. C'est justement ce qu'assure la notion de points de stabilité introduite ci-dessus. Pour être plus précis, donnons le résultat suivant (cf. [10], [12] ou [13]) :

THÉORÈME 4.3.*[Keldyš] On dira qu'un ouvert ω est stable (au sens de Keldyš) si tous les points de son bord (sauf éventuellement un ensemble de capacité nulle) sont des points de stabilité au sens de la définition 4.2. Soit ω_n une suite d'ouverts inclus dans une boule D et u_n la solution du problème de Dirichlet*

$$(P_n)\ \begin{cases} -\Delta u_n = f & \text{dans} \quad \omega_n \\ \\ u_n = 0 & \text{sur} \quad \partial\omega_n. \end{cases}$$

Alors si les ω_n convergent au sens des compacts vers ω (voir définition 2.4) et si ω est stable, la suite u_n converge dans $H_0^1(D)$ vers u solution du problème de Dirichlet sur ω :

$$(P)\ \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \omega \\ \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\omega \end{cases}$$

(les fonctions u_n et u sont prolongées par zéro en dehors de ω_n et ω).

Avant de chercher à appliquer ce résultat à notre problème, nous allons donner une condition suffisante de nature géométrique assurant qu'un point du bord est un point de stabilité.

Dans la suite, x_0 est un point du bord d'un ouvert Ω fixé. Pour tout $\rho > 0$, nous noterons $S_\rho = \{y \in \overline{\Omega}^c, |x_0 - y| = \rho\}$ (intersection de la sphère centrée en x_0 et de rayon ρ avec l'extérieur de Ω) et $S(\rho)$ la surface (ou mesure $N-1$-dimensionnelle) de S_ρ. Nous allons donner le critère de stabilité suivant, qui est dû, pour la dimension 3, à Keldyš.

PROPOSITION 4.4. *Soit $x_0 \in \partial\Omega$ et $S(\rho)$ défini comme ci-dessus. Supposons qu'il existe une constante c telle que, pour ρ assez petit, on ait*

$$S(\rho) \geq c\rho^k \text{ avec } \begin{cases} k > 2, \text{ en dimension } 3 \\ \\ 2(N-1) \geq k > N-1, \text{ en dimension } N \geq 4 \end{cases}$$

alors x_0 est un point de stabilité pour $\partial\Omega$.

Nous allons donner le schéma de la preuve sans trop entrer dans les détails de calcul. Pour plus de précisions, nous renvoyons à [2].

Il s'agit donc de minorer la capacité de E_n définie par (4.1). Pour cela, nous introduisons le potentiel V, associé à une mesure μ positive dont le support est inclus dans E_n, et défini par la formule :

$$V(x) = C_{N,n,k} \int_{2^{-n}}^{2^{1-n}} \frac{d\rho}{S(\rho)} \int_{S_\rho} \frac{ds(y)}{|x-y|^{N-2}} \tag{4.2}$$

où la constante $C_{N,n,k}$ est définie par

$$C_{N,n,k} = \frac{c_N}{nk2^{n(k-N+1)(N-3)/(N-1)}} \tag{4.3}$$

où c_N est une constante ne dépendant que de la dimension et de la constante c intervenant dans l'hypothèse et qui sera précisée un peu plus loin.

La masse totale de μ est égale à

$$\mu(E_n) = C_{N,n,k} \int_{2^{-n}}^{2^{1-n}} \frac{d\rho}{S(\rho)} \int_{S_\rho} ds = 2^{-n} C_{N,n,k}$$

et donc si nous prouvons que $V(x) \leq 1$ sur E_n, nous aurons $c(E_n) \geq \mu(E_n)$. Ainsi, le terme général de la série dont il est question dans la définition de la stabilité sera minoré par

$$2^{(N-2)n} \frac{c_N 2^{-n}}{nk2^{n(k-N+1)(N-3)/(N-1)}} = c_N \frac{2^{n(2(N-1)-k)(N-3)/(N-1)}}{nk}$$

qui est bien le terme général d'une série divergente, pour tout k, dans le cas $N = 3$ et pour $k \leq 2(N-1)$ dans le cas général.

Il reste donc à montrer que $V(x) \leq 1$ sur E_n. Pour cela fixons $x \in E_n$ et notons $\delta = |x - x_0|$. Pour une surface $S(\rho)$ fixée, il est clair que

$$\frac{1}{S(\rho)} \int_{S_\rho} \frac{ds(y)}{|x-y|^{N-2}}$$

sera maximal si $|x - y|$ est minimal, c'est-à-dire, en particulier quand S_ρ est une calotte sphérique d'axe x_0x. Introduisons un repère local centré en x_0 et tel que $x = (0, \ldots, 0, \delta)$ et désignons par $\widehat{S}_\rho$ la partie de la sphère de rayon ρ, d'axe de symétrie l'axe « vertical »dirigé par e_N et dont l'aire est exactement $S(\rho)$. On peut donc majorer $\displaystyle\frac{1}{S(\rho)} \int_{S_\rho} \frac{ds(y)}{|x-y|^{N-2}}$ par $\displaystyle\frac{1}{S(\rho)} \int_{\widehat{S}_\rho} \frac{ds(y)}{|x-y|^{N-2}}$. Maintenant cette dernière expression peut se calculer en coordonnées sphériques comme étant

$$\int_{\widehat{S}_\rho} \frac{ds(y)}{|x-y|^{N-2}} = \frac{\rho^{N-1}\omega_N}{I_{N-2}} \int_0^{\varphi} \frac{\sin^{N-2}(\theta_{N-1})\, d\theta_{N-1}}{(\rho^2 + \delta^2 - 2\rho\delta\cos(\theta_{N-1}))^{(N-2)/2}} \tag{4.4}$$

où ω_N est la surface de la sphère unité de $\mathbb{R}^N$, $I_{N-2} = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{N-2} t\, dt$ et φ est l'angle au centre définissant la calotte sphérique $\widehat{S}_\rho$, relié à $S(\rho)$ par la relation

$$S(\rho) = \frac{\rho^{N-1}\omega_N}{I_{N-2}} \int_0^{\varphi} \sin^{N-2} t\, dt. \tag{4.5}$$

Il est facile de vérifier que, pour tout ρ et δ positifs, et $\theta \in [0, \pi]$ on a

$$\frac{\sin\theta}{(\rho^2 + \delta^2 - 2\rho\delta\cos\theta)^{1/2}} \leq 1$$

et donc on a la majoration

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{S(\rho)}\int_{S_\rho}\frac{ds(y)}{|x-y|^{N-2}} &\leq \frac{\rho^{N-1}\omega_N}{S(\rho)I_{N-2}}\int_0^{\varphi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{(\rho^2+\delta^2-2\rho\delta\cos\theta)^{1/2}} \\
&= \frac{\rho^{N-1}\omega_N}{S(\rho)I_{N-2}}\times\frac{2(1-\cos\varphi)}{\sqrt{\rho^2+\delta^2-2\rho\delta\cos\varphi}+|\delta-\rho|}\,.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Maintenant, pour pouvoir estimer φ en fonction de ρ, on utilise le lemme immédiat (mais qui nous resservira un peu plus loin) :

LEMME 4.5. *Soit* $\psi(x)=\displaystyle\int_0^x \sin^{N-2} t\, dt$*, alors* ψ *est une bijection de* $[0,\pi]$ *sur* $[0, I_{N-2}]$*, et au voisinage de zéro on a les équivalents*

$$
\begin{cases}
\psi(x)\sim\frac{x^{N-1}}{N-1} \\
\psi^{-1}(x)\sim[(N-1)x]^{\frac{1}{N-1}}.
\end{cases}
\tag{4.7}
$$

On a, grâce au lemme 4.5 et à (4.5), l'existence de deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$
c_1\frac{S(\rho)^{\frac{1}{N-1}}}{\rho}\leq\varphi\leq c_2\frac{S(\rho)^{\frac{1}{N-1}}}{\rho},
$$

ce qui permet de majorer dans (4.6)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{S(\rho)}\int_{S_\rho}\frac{ds(y)}{|x-y|^{N-2}} &\leq \frac{\omega_N\rho^{N-1}}{I_{N-2}S(\rho)}\frac{\varphi^2}{\sqrt{(\rho-\delta)^2+\rho\delta\varphi^2(1-\varphi^2/12)}+|\delta-\rho|} \\
&\leq \frac{\omega_N\rho^{N-3}}{I_{N-2}S(\rho)^{(N-3)/(N-1)}}\times\frac{1}{\sqrt{(\rho-\delta)^2+\rho\delta\rho^{\beta}(1-\rho^{\beta}/12)}+|\delta-\rho|}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

où $\beta=\frac{2(k-N+1)}{N-1}>0$. En minorant enfin ρ par 2^{-n} dans l'intégrale de 2^{-n} à 2^{1-n}, on arrive à nos fins, à savoir que

$$
V(x)\leq C_{N,n,k}2^{\alpha_{N,n,k}}\int_{2^{-n}}^{2^{1-n}}\frac{d\rho}{|\rho-\delta|+2^{-n-n\beta/2}(1-2^{-n\beta}/12)^{1/2}}
$$

où $\alpha_{N,n,k}=n(k-N+1)(N-3)/(N-1)$, c'est-à-dire

$$
V(x)\leq C_{N,n,k}2^{\alpha_{N,n,k}}\int_{-2^{-n-1}}^{2^{-n-1}}\frac{dt}{|t|+2^{-n-n\beta/2}(1-2^{-n\beta}/12)^{1/2}}\leq 1
$$

en utilisant le fait que $\frac{1}{2}\rho\leq\delta\leq 2\rho$ et la définition de la constante $C_{N,n,k}$. □

Décrivons à présent de manière un peu plus précise le comportement du bord d'un ouvert Ω, vérifiant la C-PGN, au voisinage de C. Ceci, dans le but de prouver que même les éventuels points de rebroussement de $\partial\Omega$ sont des points de stabilité.

PROPOSITION 4.6. *Soit $x_0 \in \partial\Omega \cap \partial C$, H un hyperplan d'appui à C en x_0, H^+ le demi-espace ouvert limité par H et ne contenant pas C. Soit R le rayon d'un cylindre d'axe orthogonal à H qui contient strictement C. Alors, si Ω a la C-PGN,*

$$\Omega \cap H^+ \subset \bigcup_{z\in H, |z-x_0|=R} \overline{B}(z,R).$$

REMARQUE 4.7. C'est un résultat global, mais son intérêt est surtout de décrire localement $\partial\Omega$ au voisinage de x_0 : la réunion des sphères centrées en z et de rayon R forment en x_0 une (hyper)surface de révolution avec un point de rebroussement parfaitement caractérisé. Cette proposition nous dit donc que l'éventuelle singularité de $\partial\Omega$ au point x_0 peut être un point de rebroussement, mais que celui-ci ne peut pas être « pire »que celui de la surface décrite ci-dessus. Cette caractérisation géométrique va nous être fort utile pour estimer la capacité de l'extérieur de Ω au voisinage de x_0 (voir un peu plus loin).

Démonstration. Commençons par le cas de la dimension 2, le cas général s'y ramènera grâce à une section plane.

Pour simplifier, mettons l'origine en x_0 et choisissons le premier vecteur du repère porté par H. Notons $\mathcal{B} = \bigcup_{z\in H, |z-x_0|=R} \overline{B}(z,R)$ (qui ici se réduit à deux disques).

On raisonne par l'absurde : supposons que $\Omega \cap H^+ \setminus \mathcal{B}$ soit (un ouvert) ω non vide. Son bord est alors composé de plusieurs parties : une partie $\gamma_1 \subset \partial\Omega$, une partie $\gamma_2 \subset \partial\mathcal{B}$ et une partie (éventuellement vide) $\gamma_3 \subset H$.

Par hypothèse, Ω vérifie la PGN relativement à C, et donc aussi relativement à un segment $[R-\varepsilon, R+\varepsilon]$, pour un certain $\varepsilon > 0$. Si on note $\nu(X) = (\nu_1(X), \nu_2(X))$ la normale au point $X \in \gamma_1$ (quand elle existe), ceci se traduit par

$$\forall X = (x_1, x_2) \in \gamma_1 \cap \mathcal{N}_\Omega, \quad \nu_2(X) < 0 \ \text{ et } \ -R+\varepsilon \le x_1 - x_2\frac{\nu_1(X)}{\nu_2(X)} \le R-\varepsilon \tag{4.9}$$

ou encore, en introduisant le vecteur tangent $\tau(X)$:

$$(R-\varepsilon)\nu_2(X) \le X.\tau(X) \le (-R+\varepsilon)\nu_2(X). \tag{4.10}$$

Maintenant, pour les points situés sur γ_2, et donc sur un cercle de centre z :

$$X.\tau(X) = R\nu_2(X) \ \text{ ou } \ X.\tau(X) = -R\nu_2(X)$$

suivant le cercle ou l'orientation choisie.

Enfin pour les éventuels points situés sur γ_3, on a

$$X.\tau(X) = |X| \ge 2R > R\nu_2(X) = R.$$

Donc, dans tous les cas de figure

$$0 = \int_{\partial\omega} X.\tau(X)\,ds > \int_{\partial\omega} R\nu_2(X) = 0,$$

ce qui fournit la contradiction attendue.

Le cas N-dimensionnel se ramène au cas précédent, en utilisant le lemme suivant :

LEMME 4.8. *Si $\Omega \cap H^+$ vérifie la propriété géométrique de la normale relativement à la boule $N-1$-dimensionnelle $\overline{B}(O,R)$ de H, alors, pour tout plan perpendiculaire à H, l'ouvert relatif $P \cap \Omega \cap H^+$ satisfait la PGN relativement au segment $[-R,R]$ de P.*

En effet, quitte à changer de repère, il suffit de le faire pour le premier plan de coordonnées dirigé par x_1 et x_N. Maintenant, dire que $\Omega \cap H^+$ satisfait la $\overline{B}(O,R)$-PGN signifie que (avec des notations traditionnelles)

$$\forall X \in \mathcal{N}_\Omega \cap H^+, \quad \nu_N(X) < 0 \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{N-1} (x_i - x_N \frac{\nu_i(X)}{\nu_N(X)})^2 \le R^2$$

mais ceci entraîne clairement que

$$|x_1 - x_N \frac{\nu_1(X)}{\nu_N(X)}| \le R$$

qui n'est autre que la PGN relativement au segment $[-R,R]$. □

COROLLAIRE 4.9. *Soit Ω un ouvert vérifiant la C-PGN, alors tous les points de $\partial\Omega$ sont des points de stabilité au sens de la définition 4.2.*

Démonstration. Les points situés en dehors de ∂C ne posant pas de problèmes, choisissons un point $x_0 \in \partial\Omega \cap \partial C$. Il suffit, d'après la proposition 4.4, de trouver un exposant k convenable tel que la surface $S(\rho)$ de la partie de la sphère de centre x_0 et de rayon ρ située dans l'extérieur de Ω vérifie $S(\rho) > C\rho^k$. Or, d'après la proposition 4.6, l'extérieur de Ω contient l'extérieur de la surface de révolution formée par la réunion des boules de rayon R. Un peu de trigonométrie élémentaire montre alors que

$$S(\rho) \ge \frac{\rho^{N-1}\omega_N}{I_{N-2}} \int_0^\psi \sin^{N-2} t\, dt \quad \text{où } \psi \text{ est défini par } \ \psi = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\rho}{2R}.$$

En particulier, quand $\rho \to 0$ on a $\psi \sim \rho/2R$. On applique alors encore une fois le Lemme 4.5 : quand $\rho \to 0$ le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est équivalent à :

$$\frac{\rho^{N-1}\omega_N}{I_{N-2}} \int_0^\psi \sin^{N-2} t\, dt \sim \frac{\rho^{N-1}\omega_N}{I_{N-2}} \frac{\psi^{N-1}}{N-1} \sim \frac{\omega_N}{(N-1)I_{N-2}(2R)^{N-1}} \rho^{2N-2}$$

ce qui prouve le résultat avec $k = 2(N-1)$. □

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de continuité qui est une conséquence de la proposition 2.8, du théorème 4.3 et du corollaire 4.9 :

THÉORÈME 4.10. *Soit Ω_n une suite d'ouverts, inclus dans une boule D, satisfaisant la C-PGN et qui converge au sens de Hausdorff vers un ouvert Ω. Soit $f \in L^2(D)$. On note u_n (resp. u) la solution du problème de Dirichlet (P_n) sur Ω_n (resp. (P) sur Ω). Alors u_n converge vers u fortement dans $H_0^1(D)$ (où comme d'habitude les fonctions sont prolongées par 0 sur D).*

5. Application à un problème d'optimisation de forme

Soit F une fonction de $D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continue en (r, p) et vérifiant, de plus :

$$\forall\ (x, r, p) \in D \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N\ ,\ |F(x, r, p)| \leq c(a(x) + r^2 + |p|^2)$$

où c est une constante et $a(x)$ une fonction de $L^1(D)$.

On considère alors la fonctionnelle de domaine

$$J(\omega)\ =\ \int_\omega F(x, u_\omega(x), \nabla u_\omega(x))dx$$

où u_ω est la solution du problème de Dirichlet (P) sur ω défini dans l'introduction. On rappelle que $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des ouverts contenus dans D et qui possèdent la C-PGN.

Alors les résultats développés dans les paragraphes précédents nous permettent d'énoncer :

Proposition 5.1. *Si* $\inf(J) > -\infty$ *alors le problème de minimisation :*

$$\textit{Trouver } \Omega \in \mathcal{C} \textit{ tel que } J(\Omega)\ = \min\{J(\omega)\ ,\ \omega \in \mathcal{C}\}$$

possède une solution.

Démonstration. Soit Ω_n une suite minimisante d'ouverts de $\mathcal{C}$. D'après la proposition 2.5 et le théorème 3.2, on peut en extraire une sous-suite, encore notée Ω_n, qui converge au sens de Hausdorff vers un ouvert Ω qui appartient à $\mathcal{C}$. Mais, d'après le théorème 4.10, u_{Ω_n} solution du problème de Dirichlet sur Ω_n converge dans $H_0^1(D)$ (fortement) vers u_Ω solution du problème de Dirichlet sur Ω et donc, quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut supposer que u_{Ω_n} et ∇u_{Ω_n} convergent presque partout dans D vers u_Ω et ∇u_Ω. Les hypothèses sur F et le théorème de convergence dominée assurent alors que $J(\Omega_n) \to J(\Omega)$ et donc Ω réalise le minimum de J sur $\mathcal{C}$. □

Remarque 5.2. Il est également possible, dans le problème de minimisation, de mettre une contrainte de volume, c'est à dire de travailler sur l'ensemble $\mathcal{C}^V\ =\ \{\omega \in \mathcal{C}$ tel que $\mathrm{vol}(\omega)\ =\ \mathrm{V}\}$. On peut en effet montrer, en utilisant la proposition 2.8, que cet ensemble est fermé pour la topologie de Hausdorff, cf. [2], c'est-à-dire que :

Proposition 5.3. *Soit Ω_n une suite d'ouverts possédant la C-PGN qui converge au sens de Hausdorff vers Ω. Alors $vol(\Omega_n) \to vol(\Omega)$.*

Comme nous l'avions dit dans l'introduction, une des motivations de ce travail était l'étude du problème à frontière libre

$$(FL)\ \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \\ |\nabla u| = \text{cst} = k & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

pour lequel on sait *a priori* que la solution, si elle existe, satisfait la C-PGN (ici, on suppose f à support compact et C désigne l'enveloppe convexe du support de f, cf. [16]). De plus, la théorie des sous-solutions et sur-solutions géométriques développée dans [11] permet de se placer dans une grande boule D (une sur-solution) et donc on peut se permettre de rechercher les solutions du problème (FL) dans la classe $\mathcal{C}$ introduite précédemment. Introduisons, comme l'ont fait B. Gustafsson et H. Shahgholian dans [8], inspirés par le travail fondamental de [1], la fonctionnelle de domaine définie par

$$J(\Omega) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\Omega(x)|^2\,dx - \int_\Omega f u_\Omega(x)\,dx + k^2 vol(\Omega) \tag{5.1}$$

où u_Ω est la solution du problème de Dirichlet (P) et où nous supposerons $f \in L^2(D)$ positive et à support compact. On peut aussi écrire, en utilisant la formulation variationnelle de (P),

$$J(\Omega) := -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\Omega(x)|^2\,dx + k^2 vol(\Omega) = -\frac{1}{2}\int_\Omega f u_\Omega(x)\,dx + k^2 vol(\Omega). \tag{5.2}$$

Maintenant, comme tous les ouverts que l'on considère sont inclus dans la boule D, le principe du maximum montre simplement que $0 \le u_\Omega \le u_D$ dans D et donc, en utilisant (5.2)

$$\forall \Omega \in \mathcal{C},\; J(\Omega) \ge -\frac{1}{2}\int_D f u_D(x)\,dx$$

ce qui montre que J est minorée sur $\mathcal{C}$. On a donc :

COROLLAIRE 5.4.*La fonctionnelle J définie en (5.1) possède un minimum sur la classe des ouverts Ω ayant la C-PGN et contenus dans une boule D.*

On aimerait pouvoir dire que le minimum ainsi obtenu est solution du problème (FL). Ce n'est pas si simple. Tout d'abord, il faut noter que, sans hypothèses sur f et k, le problème (FL) n'a en général pas de solutions. Une façon simple de s'en convaincre est d'intégrer l'équation sur Ω, on obtient comme condition nécessaire d'existence :

$$\int_\Omega f(x)\,dx = k|\partial\Omega|$$

(où $|\partial\Omega|$ désigne le périmètre de Ω), ce qui montre que si f a une masse totale trop petite ou si k est trop grand, le périmètre de Ω ne sera pas assez grand pour que Ω englobe C. Dans un tel cas ce qui se passe concrètement, c'est que le minimum que nous avons trouvé au Corollaire 5.3 vient « toucher »le convexe C, i.e. $\partial\Omega$ et ∂C ont une partie commune. Mais alors cette situation particulière peut nous permettre d'obtenir, en utilisant des arguments typiques de minimalité (on essaye de fabriquer un ouvert meilleur que l'ouvert minimal en se décollant un peu de C), des conditions suffisantes sur f et k pour assurer l'existence d'une solution à (FL). Nous renvoyons le lecteur intéressé à [2] et aussi à [8] où d'autres conditions suffisantes sont obtenues par des techniques différentes.

L'autre difficulté à laquelle on est confronté est l'écriture générale des conditions d'optimalité. On veut utiliser le formalisme de la dérivation par rapport au domaine. Mais comme on a travaillé avec des contraintes, il convient de n'autoriser que des déplacements admissibles, i.e. qui permettent de conserver la C-PGN. De plus, formellement la dérivée de la fonctionnelle J au point Ω dans une direction de déplacement V est donnée par (cf. [14] ou [17]) :

$$dJ(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} (k^2 - |\nabla u_\Omega(\sigma)|^2) V.\nu \, d\sigma,$$

(ce qui permettrait de retrouver la condition surdéterminée au minimum de J). Malheureusement ici, comme le bord $\partial\Omega$ est seulement lipschitzien, on ne sait pas si $u_\Omega \in H^2(\Omega)$ et donc l'intégrale ci-dessus n'a pas nécessairement un sens. Dans [3] (voir aussi [14]), les auteurs obtiennent la différentiablilité de J, sous la seule hypothèse de lipschitzianité, la dérivée s'écrivant alors

$$dJ(\Omega, V) = \int_{\Omega} \operatorname{div}\{(k^2 - |\nabla u(x)|^2) V\} \, dx.$$

Dans [2] est faite une étude complète des conditions d'optimalité tenant compte de tous les aspects précités et nous renvoyons encore une fois le lecteur intéressé à ce travail.

Bibliographie

[1] H.W. Alt, L.A. Caffarelli : Existence and regularity for a minimum problem with free boundary, *J. Reine angew. Math.*, **325**, 1981, 105–144.

[2] M. Barkatou : Thèse de l'Université de Franche-Comté, 1997.

[3] J.A. Bello, E. Fernandez-Cara, J. Lemoine, J. Simon : On drag differentiability for Lipschitz domains, *Control of Partial Differential Equations and Applications*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series **174**, Dekker, New York, 1995.

[4] D. Bucur, J.P. Zolesio : N-dimensional shape optimization under capacitary constraints, *J. of Diff. Eq.*, **123-2**, 1995, 504–522.

[5] D. Bucur, J.P. Zolesio : Boundary optimization under pseudo-curvature constraint, *Ann. Scuola Norm. Pisa*, à paraître, 1996.

[6] D. Chenais : On the existence of a solution in a domain identification problem, *J. Math. Anal. Appl.*, **52**, 1975, 189–289.

[7] D. Chenais : Sur une famille de variétés à bord lipschitziennes, application à un problème d'identification de domaine, *Ann. Inst. Fourier*, **4-27**, 1977, 201–231.

[8] B. Gustafsson, H. Shahgholian : Existence and geometric properties of solutions of a free boundary problem in potential theory, à paraître dans *J. für die Reine und Ang. Math.*

[9] L.I. Hedberg : Spectral synthesis and stability in Sobolev spaces, *Euclidean Harmonic Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, J.J. Benedetto ed., **779**, Springer, Berlin, 1980.

[10] A. Henrot : Continuity with respect to the domain for the laplacian : a survey, *Control and Cybernetics*, **23-3**, 1994, 427–443.

[11] A. Henrot : Subsolutions and supersolutions in a free boundary problem, *Arkiv für Math.*, **32-1**, 1994, 79–98.

[12] M.V. Keldyš : On the solvability and the stability of the Dirichlet problem, *Amer. Math. Soc. Trans.*, **2-51**, **1-73**, 1966.

[13] N.S. Landkof : *Foundations of modern potential theory*, Springer, Berlin, 1972.

[14] F. Murat, J. Simon : Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique, *Publ. du labo. d'Anal. Num.*, Paris VI, **1-46**, 1974.

[15] O. Pironneau : *Optimal shape design for elliptic systems*, Springer Series in Computational Physics, Springer, New York, 1984.
[16] H. Shahgholian : Quadrature surfaces as free boundaries, *Arkiv für Math.*, **32-2**, 1994, 475–492.
[17] J. Sokolowski, J. P. Zolesio : *Introduction to shape optimization : shape sensitity analysis*, Springer Series in Computational Mathematics, **10**, Springer, Berlin, 1992.
[18] V. Šverak : On optimal shape design, *J. Maths Pures Appl.*, **72-6**, 1993, 537–551.