

## SUR LES VARIATIONS NORMALES D'UN DOMAINE

D. BRESCH ET J. SIMON

RÉSUMÉ. Les variations normales d'un domaine de référence sont fréquemment utilisées dans les problèmes d'optimisation de forme. On montre que de telles variations ne préservent pas la régularité du domaine. Plus précisément, on exhibe un domaine borné  $\Omega$  de classe  $\mathbb{L}ip^m$ ,  $m$  entier, et une variation  $\alpha$  de classe  $C^\infty$  telle que  $\Omega + \alpha n$  ne soit pas de classe  $\mathbb{C}^{m-1}$ . La variation  $\alpha$  peut être choisie aussi petite que l'on désire.

Ceci montre que l'utilisation des variations normales dans une méthode itérative d'approximation pour la recherche d'un domaine optimal entraîne une perte de régularité à chaque itération, de sorte qu'il est préférable d'utiliser les variations transverses qui, elles, conservent la régularité du bord.

### 1. INTRODUCTION.

Dans les problèmes d'optimisation de la forme d'un domaine et dans les problèmes de frontière libre, on est amené à déformer un domaine de référence  $\Omega$ .

J. Hadamard [12] a considéré, dès 1907, les «variations normales», de la forme  $\alpha n$ , où  $\alpha$  est une fonction scalaire définie sur le bord  $\Gamma$  de  $\Omega$  et où  $n$  est le champ de vecteurs unitaire normal à  $\Gamma$  (orienté vers l'extérieur). Le domaine déformé a alors pour frontière (voir figure 1) :

$$\Gamma + \alpha n = \{z + \alpha(z) n(z) : z \in \Gamma\}.$$

Cette méthode a été utilisée par de nombreux auteurs, citons C. Bandle [1], C. Bardos et O. Pironneau [2], R.H. Gallagher et O.C. Zienkiewicz [9], T. Masanao et N. Fujii [14], B. Morel [17], O. Pironneau [19] et également P.-A. Raviart [20].

L'objet du présent travail est d'établir que cette méthode ne conserve pas la régularité du bord : Si  $\Gamma$  est un graphe local qui est  $\mathbb{L}ip^m$ ,  $m$  entier, en général  $\Gamma + \alpha n$  n'est pas mieux que  $\mathbb{C}^{m-1}$  (les lettres à double baton servent ici à noter la régularité des surfaces, définie ci-dessous, donc  $\mathbb{C}$  n'est pas l'ensemble des complexes). On le montre sur un exemple avec  $\alpha$  de classe  $C^\infty$  et arbitrairement petit. On prouve également que, en dimension deux, seules les variations normales d'amplitude constante préservent la régularité.

---

Didier Bresch, Jacques Simon : Université Blaise Pascal and C.N.R.S., Laboratoire de Mathématiques Appliquées, 63177 Aubière cedex, France.

Email: [bresch@ucfma.univ-bpclermont.fr](mailto:bresch@ucfma.univ-bpclermont.fr), [simon@ucfma.univ-bpclermont.fr](mailto:simon@ucfma.univ-bpclermont.fr).

Reçu par le journal le 7 décembre 1997. Révisé les 26 février et 20 avril 1998. Accepté pour publication le 5 mai 1998.

© Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles. Typeset by  $\text{T}_E\text{X}$ .

*Une alternative : les variations transverses.* L'optimisation de forme avec utilisation de méthodes itératives conduit à des déformations successives du domaine. Par des variations normales assez nombreuses, on s'exposerait à perdre toute la régularité (lorsqu'elle est d'ordre fini).

Il est donc préférable d'utiliser des variations scalaires  $\alpha$  portées par un champ de vecteurs  $w$  différent de la normale. Le domaine déformé a alors pour frontière  $\Gamma + \alpha w$  (voir figure 2). Pour conserver la régularité de la frontière il suffit que  $w$  soit aussi régulier que  $\Gamma$  (et que  $\alpha$  soit régulier et pas trop grand) et pour pouvoir atteindre toute forme voisine de  $\Gamma$  il suffit que  $w$  lui soit «transverse» (c'est-à-dire qu'il ne soit nulle part tangent à  $\Gamma$ ).

On peut utiliser un champ  $w$  défini seulement sur  $\Gamma$ , par exemple une approximation régulière de la normale. On peut aussi utiliser un champ défini dans tout l'espace, par exemple un champ radial si  $\Omega$  est étoilé, ce qui permet de le conserver lors de variations successives, tant qu'il reste transverse.

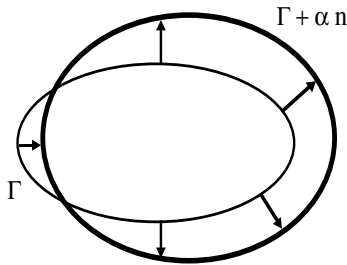


Figure 1 : Variations normales.

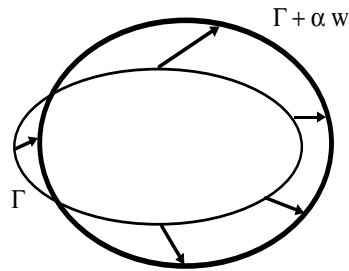


Figure 2 : Variations transverses.

*Les variations réparties.* Au lieu de variations scalaires portées par un champ donné, on peut aussi représenter les variations par un champ de vecteurs  $u$ . La frontière du domaine déformé est alors  $\Gamma + u = \{z + u(z) : z \in \Gamma\}$ . Lorsque  $u$  est défini dans tout l'espace, un puissant outil de démonstration est fourni par le changement de variable  $I + u$  qui permet de ramener le domaine variable  $\Omega + u$  au domaine fixe  $\Omega$ , cf. [18] et [22].

Ces variations préservent la régularité, comme on le précisera à la fin du paragraphe 5. Elles ont été utilisées par de nombreux auteurs, en particulier J. Bello, E. Fernández-Cara, J. Lemoine et J. Simon [3], O. Bodart et P. Demeestère [4], D. Chenaïs, J. Monnier et J.-P. Vila [6], M. Chouilli et A. Henrot [7], P.R. Garabeddian et M.M. Schiffer [10], E. Fernández-Cara [8], P. Guillaume [11], M. Masmoudi [15], F. Mignot, F. Murat et J.-P. Puel [16], F. Murat et J. Simon [18], B. Rousselet [21], J. Simon [22] ; voir aussi, A. Henrot et M. Pierre [13].

## 2. PERTE DE RÉGULARITÉ POUR UN OUVERT $\text{Lip}^m$ .

On dit que  $\Gamma \in \mathbb{C}^m$  s'il est localement le graphe d'une fonction de classe  $\mathbb{C}^m$ . Plus précisément on le définit de la façon suivante.

**DÉFINITION 2.1.** Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  et  $m \geq 0$  un réel.

(i) On dit que  $\Gamma \in \mathbb{C}^m$  s'il existe  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que, pour tout  $v \in \Gamma$ , il existe :

— des coordonnées cartésiennes  $(z_1, \dots, z_d)$  d'origine  $v$ , auxquelles on associe  $z_* = (z_1, \dots, z_{d-1})$  et un cylindre  $\Theta = \{z \in \mathbb{R}^d : |z_*| < a, |z_d| < a\}$  de section  $\Theta_* = \{z_* \in \mathbb{R}^{d-1} : |z_*| < a\}$

— une fonction  $\Psi \in C^m(\Theta_*)$  telle que  $\Psi(0) = 0, \|\Psi\|_{C^m} \leq b$  et,  $\forall z \in \Theta$ ,

$$z \in \Gamma \iff z_d = \Psi(z_*).$$

(ii) On dit que  $\Gamma \in \text{Lip}^m$ , si  $\Psi \in \text{Lip}^m(\Theta_*)$ . □

Une fonction est dite  $\text{Lip}^m$  pour  $m$  entier si elle est  $m - 1$  fois différentiable à dérivées lipschitziennes.

Notons que  $\Gamma \in \mathbb{C}^m$  est équivalent à  $\Gamma$  est une variété  $C^m$ , si  $m \geq 1$ , et  $\Gamma \in \text{Lip}^m$  est équivalent à  $\Gamma$  est une variété  $\text{Lip}^m$ , si  $m \geq 2$ .

Par contre,  $\Gamma \in \text{Lip}^1$  est plus fort que  $\Gamma$  est une variété  $\text{Lip}^1$  (cf. [18] p. II-43, où l'on trouve un exemple dû à M. Zerner).

Le résultat principal de ce travail est le suivant.

**THÉORÈME 2.2.** *Soit  $m$  entier,  $m \geq 1$ . Il existe*

$$\Gamma \in \text{Lip}^m, \quad \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

tels que :  $\forall t > 0$ ,

$$\Gamma + t\alpha n \notin C^{m-1}. \quad \square$$

Ce théorème donne en particulier

$$\Gamma + \alpha n \notin C^{m-1}.$$

Cette propriété seule ne serait pas probante car on ne peut espérer de régularité de  $\Gamma + \alpha n$  que si  $\alpha$  est «assez petit» (par exemple si, en chaque point de  $\Gamma$ ,  $|\alpha|$  est inférieur au rayon de courbure de  $\Gamma$ ).

La non régularité pour chaque  $t > 0$  énoncée au théorème 2.2 montre qu'on ne peut espérer mieux que  $C^{m-1}$ , quelle que soit la «taille» de la variation normale, à savoir  $t\alpha$ .

*Démonstration du théorème 2.2.* Il suffit de construire un exemple en dimension 2. Le résultat général, en dimension  $d$ , s'en déduit en considérant  $\Gamma_d = \Gamma_2 \times \mathbb{R}^{d-2}$  et  $\alpha_d(z_1, z_2, \dots, z_d) = \alpha_2(z_1, z_2)$ .

En dimension 2, on choisit  $\Gamma$  égale au graphe de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x^m/m & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

et  $\alpha(x, y) = 1 + x$ . Evidemment,  $\Gamma \in \text{Lip}^m$ .

Pour  $m = 1$ , la normale  $n$  étant discontinue à l'origine,  $\Gamma + t\alpha n$  est composée (voir figure 3) de deux morceaux qui ne se raccordent pas de sorte qu'il n'est même pas  $C^0$ .

Pour  $m \geq 2$ ,  $\Gamma + t\alpha n$  est la courbe paramétrée définie par

$$\Gamma + t\alpha n = \{(X(x), Y(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

avec

$$\begin{aligned}
 X(x) &= \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0, \\ x - \frac{t(1+x)x^{m-1}}{\sqrt{1+x^{2m-2}}} & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \\
 Y(x) &= \begin{cases} t(1+x) & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x^m}{m} + \frac{t(1+x)}{\sqrt{1+x^{2m-2}}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Quand  $m = 2$ ,  $\Gamma + t\alpha n \notin \mathbb{C}^1$  car la pente de cette courbe est discontinue au point paramétré par  $x = 0$  (voir figure 4). En effet, la pente vaut  $t$  à gauche et  $t/(1-t)$  à droite car, quand  $x \rightarrow 0_+$ , on a  $Y(x) - Y(0) \approx tx$  et  $X(x) - X(0) \approx (1-t)x$ .

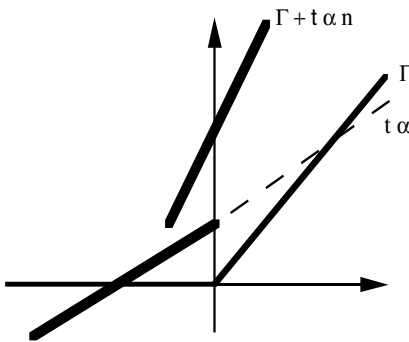


Figure 3 : Cas  $m = 1$  ( $t = 1/2$ ).

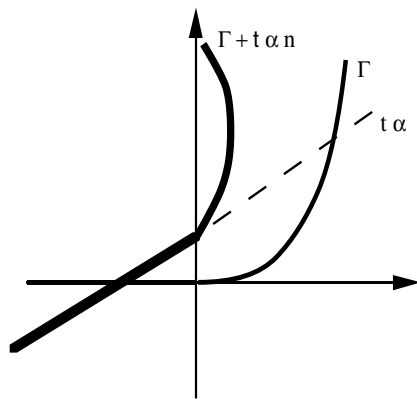


Figure 4 : Cas  $m = 2$  ( $t = 1/2$ ).

Quand  $m \geq 3$ ,  $\Gamma + t\alpha n$  est, au voisinage du point paramétré par  $x = 0$ , le graphe de la fonction  $F$  définie par  $Y(x) = F(X(x))$ . Excepté au point paramétré par  $x = 0$ ,  $F$  est indéfiniment dérivable et sa dérivée d'ordre  $k \geq 2$  vaut, comme on le vérifiera au lemme 4.1 ci-dessous,

$$\frac{d^k F}{dX^k} \circ X = \frac{P_k\left(\frac{dX}{dx}, \dots, \frac{d^{k-1}X}{dx^{k-1}}, \frac{dY}{dx}, \dots, \frac{d^k Y}{dx^k}\right)}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^{2k-1}} - \frac{\frac{dY}{dx} \frac{d^k X}{dx^k}}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^{k+1}} \tag{2.3}$$

où  $P_k$  est un polynôme. En  $x = 0$ , les dérivées d'ordre 1 à  $m - 2$  de  $X$  et les dérivées d'ordre 1 à  $m - 1$  de  $Y$  sont continues de sorte que le premier terme du second membre est continu. Par contre  $\frac{d^{m-1}X}{dx^{m-1}}$  est discontinu : il vaut 0 à gauche et  $-t(m - 1)!$  à droite. De plus,  $\frac{dX}{dx}(0) = 1$  et  $\frac{dY}{dx}(0) = t$ .

Pour  $k = m - 1$  le second membre est donc discontinu en  $x = 0$ , puisqu'il est la somme d'un terme qui est continu et d'un autre qui ne l'est pas. Comme  $X$  est localement un homéomorphisme,  $\frac{d^{m-1}F}{dX^{m-1}}$  est lui aussi discontinu en 0, c'est-à-dire que  $F$  n'est  $C^{m-1}$  dans aucun voisinage de 0.

Il en résulte que  $\Gamma + t\alpha n \notin \mathbb{C}^{m-1}$ . En effet, comme  $F \in \text{Lip}^1$ , le lemme 6.1 ci-dessous montre que dans aucun repère cette courbe ne peut être le graphe d'une fonction  $C^{m-1}$  au voisinage de 0.  $\square$

*Domaine borné.* On a construit, dans la démonstration du théorème 2.2, un domaine  $\Gamma$  qui n'est pas borné. On peut en construire un qui soit borné, en

modifiant la surface construite en dehors du voisinage de 0, où se trouve la singularité.

*Optimalité.* Le théorème 2.2 donne la perte de régularité la plus élevée possible par des variations normales. En effet, on a la propriété suivante :

Soient  $\Gamma \in \text{Lip}^m$  et  $\alpha \in \text{Lip}^{m-1}(\mathbb{R}^d)$  où  $m \geq 2$ . Alors, pour tout  $t$  assez petit,

$$\Gamma + t\alpha n \in \text{Lip}^{m-1}. \tag{2.4}$$

Plus précisément, il suffit qu'en tout point  $z$  de  $\Gamma$  on ait  $t|\alpha(z)| < |R(z)|$ , où  $R(z)$  est le rayon de courbure (ordinaire si  $d = 2$ , «minimal» si  $d \geq 2$ ) de  $\Gamma$  en  $z$ .

### 3. PERTE DE RÉGULARITÉ POUR UN OUVERT $\mathbb{C}^m$ .

On peut compléter le théorème 2.2 par le résultat suivant, dont une démonstration abrégée a été donnée dans [5].

**THÉORÈME 3.1.** *Soit  $m$  réel,  $m \geq 1$ . Il existe*

$$\Gamma \in \mathbb{C}^m, \quad \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

tels que :  $\forall t > 0, \forall \varepsilon > 0,$

$$\Gamma + t\alpha n \notin \mathbb{C}^{m-1+\varepsilon}. \quad \square$$

Notons qu'ici  $m$  n'est pas nécessairement entier. Dans le cas entier, le théorème 2.2 est plus fort car

$$\text{Lip}^{m+\varepsilon} \subset \mathbb{C}^m \subset \text{Lip}^m.$$

Signalons que pour  $1 \leq m < 2$ , on peut construire un domaine  $\Gamma \in \text{Lip}^m$  tel que, pour tout  $t > 0$ ,  $\Gamma + tn$  ne soit même pas un graphe (et donc  $\Gamma + tn \notin \mathbb{C}^0$ ).

*Démonstration.* On se ramène, comme au théorème 2.2, à la dimension 2.

*Le cas  $m > 2$  non entier.* On reprend l'exemple utilisé lors de la démonstration du théorème 2.2, à savoir  $\Gamma$  est le graphe de la fonction  $f$  définie par (2.1). Comme  $m$  n'est plus entier, on a maintenant  $\Gamma \in \mathbb{C}^m$ .

On décompose  $m = e + r$  où  $e$  est la partie entière et  $0 < r < 1$ . Les expressions (2.2) montrent que  $X \in C^{e-1}([0, 1])$  et  $Y \in C^e([0, 1])$  de sorte que (2.3) permet d'écrire

$$\frac{d^{e-1}F}{dX^{e-1}} \circ X(x) = \Phi(x) + x^r\Psi(x), \quad \Psi(x) = \frac{t^2(m-1) \dots (m-e+1)}{(1+x^{2m-2})\left(\frac{dX}{dx}(x)\right)^e}$$

où  $\Phi \in C^1([0, 1])$ . Évidemment,  $1/\Psi \in C^1([0, 1])$  et  $\forall \varepsilon > 0, \forall a > 0, x^r \notin C^{r+\varepsilon}([0, a])$ , ce qui entraîne

$$\frac{d^{e-1}F}{dX^{e-1}} \circ X \notin C^{r+\varepsilon}([0, a]).$$

Comme  $X$  est un difféomorphisme, il en résulte que  $F \notin C^{m-1+\varepsilon}([0, a])$  ce qui, grâce au lemme 6.1, prouve que  $\Gamma + t \alpha n \notin C^{m-1+\varepsilon}$ .

*Le cas  $1 < m < 2$ .* On choisit à nouveau  $\Gamma$  étant le graphe de la fonction  $f$  définie par (2.1), par contre on choisit  $\alpha \equiv 1$ . Maintenant  $m = 1 + r$  et les expressions (2.2) doivent être remplacées par

$$X(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0, \\ x - \frac{tx^r}{\sqrt{1+x^{2r}}} & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

$$Y(x) = \begin{cases} t & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x^{1+r}}{1+r} + \frac{t}{\sqrt{1+x^{2r}}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Quand  $x \rightarrow 0_+$  on a  $Y(x) - Y(0) \approx -tx^{2r}/2$  et  $X(x) - X(0) \approx -tx^r$  donc le point paramétré par  $x = 0$  est un point de rebroussement de la courbe  $\Gamma + t \alpha n$ . Au voisinage de ce point, elle ne peut pas être un graphe local, ce qui prouve que  $\Gamma + t \alpha n \notin C^0$ .

*Le cas  $m \geq 2$  entier.* Le résultat relatif au cas non entier entraîne que,  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $\Gamma_\varepsilon \in C^{m+\varepsilon/2}$  tel que :  $\forall t > 0, \forall \nu > 0$ ,

$$\Gamma_\varepsilon + t \alpha n_\varepsilon \notin C^{m-1+\nu+\varepsilon/2}.$$

En prenant  $\nu = \varepsilon/2$  c'est presque ce qu'on veut, sauf que  $\Gamma$  dépend ici de  $\varepsilon$ .

On construit  $\Gamma$  indépendant de  $\varepsilon$  de la façon suivante. On divise  $[0, 1]$  en une suite d'intervalles  $[2^{-k-1}, 2^{-k}]$  et on choisit une fonction  $f$  de classe  $C^m$  telle que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2^{-k-1} \leq x \leq \frac{4}{3}2^{-k-1} \text{ ou si } x \notin ]0, 1[, \\ (x - \frac{4}{3}2^{-k-1})^{m+2^{-k}} & \text{si } \frac{4}{3}2^{-k-1} \leq x \leq \frac{5}{3}2^{-k-1}. \end{cases}$$

La démonstration du cas non entier montre que la portion de courbe relative à l'intervalle  $[2^{-k-1}, 2^{-k}]$  vérifie  $\Gamma_k + t \alpha n \notin C^{m-1+2^{-k+1}}$  donc,  $\forall \varepsilon > 0, \Gamma + t \alpha n \notin C^{m-1+\varepsilon}$ .

*Le cas  $m = 1$ .* Il résulte du cas  $1 < m < 2$ . □

#### 4. DÉRIVÉES DU GRAPHE ASSOCIÉ À UNE SURFACE PARAMÉTRÉE.

On se propose ici de démontrer la formule (2.3). En fait, nous allons démontrer la formule un peu plus précise (4.2) pour les besoins de la proposition 5.1.

LEMME 4.1. *Soit  $k$  entier,  $k \geq 1$ . Soit  $X \in C^k([-a, a])$ , une fonction croissante telle que  $X(-a) = -A'$ ,  $X(a) = A$  et  $\frac{dX}{dx} \geq c > 0$ . Soit  $Y \in C^k([-a, a])$ .*

*On définit une application  $F \in C^k([-A', A])$  par :  $\forall x \in [-a, a]$ ,*

$$F(X(x)) = Y(x).$$

Ses dérivées sont données par :  $\forall x \in [-a, a]$ ,

$$\frac{dF}{dX} \circ X = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} \tag{4.1}$$

et, pour  $k \geq 2$ ,

$$\frac{d^k F}{dX^k} \circ X = \frac{Q_k\left(\frac{dX}{dx}, \dots, \frac{d^{k-1}X}{dx^{k-1}}, \frac{dY}{dx}, \dots, \frac{d^{k-1}Y}{dx^{k-1}}\right)}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^{2k-1}} + \frac{\frac{d^k Y}{dx^k}}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^k} - \frac{\frac{dY}{dx} \frac{d^k X}{dx^k}}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^{k+1}} \tag{4.2}$$

où  $Q_k$  est un polynôme homogène de degré  $k$ . □

*Démonstration du lemme 4.1.* D'après les hypothèses sur la fonction  $X$ , elle admet un inverse  $\varphi$  qui, par des formules classiques de dérivation, est de classe  $C^k$ . Par définition

$$F(X) = Y(\varphi(X)).$$

Les propriétés de dérivabilité des applications composées montrent que le second membre est de classe  $C^k$ , ce qui prouve que  $F$  est de classe  $C^k$  sur  $[-A', A]$ .

On va démontrer (4.2) par itérations. Commençons par le cas  $k = 1$ . En dérivant l'égalité  $Y = F \circ X$ , il vient

$$\frac{dY}{dx} = \left(\frac{dF}{dX} \circ X\right) \frac{dX}{dx}$$

ce qui établit (4.1) puisque  $\frac{dX}{dx} > 0$ . En dérivant l'expression (4.1), on obtient

$$\left(\frac{d^2 F}{dX^2} \circ X\right) \frac{dX}{dx} = \frac{\frac{d^2 Y}{dx^2}}{\frac{dX}{dx}} - \frac{\frac{dY}{dx} \frac{d^2 X}{dx^2}}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^2},$$

ce qui établit (4.2), avec  $Q_2 \equiv 0$ .

Supposons maintenant que (4.2) soit vérifiée à l'ordre  $k$ . En dérivant il vient

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^{k+1} F}{dX^{k+1}} \circ X\right) \frac{dX}{dx} = & \frac{R_k\left(\frac{dX}{dx}, \dots, \frac{d^k X}{dx^k}, \frac{dY}{dx}, \dots, \frac{d^k Y}{dx^k}\right)}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^{2k-1}} \\ & - (2k-1) \frac{Q_k\left(\frac{dX}{dx}, \dots, \frac{d^{k-1}X}{dx^{k-1}}, \frac{dY}{dx}, \dots, \frac{d^{k-1}Y}{dx^{k-1}}\right) \frac{d^2 X}{dx^2}}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^{2k}} \\ & + \frac{\frac{d^{k+1} Y}{dx^{k+1}}}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^k} - k \frac{\frac{d^k Y}{dx^k} \frac{d^2 X}{dx^2}}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^{k+1}} - \frac{\frac{d^2 Y}{dx^2} \frac{d^k X}{dx^k}}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^{k+1}} + \frac{\frac{dY}{dx} \frac{d^{k+1} X}{dx^{k+1}}}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^{k+1}} + (k+1) \frac{\frac{dY}{dx} \frac{d^2 X}{dx^2} \frac{d^k X}{dx^k}}{\left(\frac{dX}{dx}\right)^{k+2}} \end{aligned}$$

où  $R_k(\dots) = \frac{d}{dx}(Q_k(\dots))$  est homogène de degré  $k$ . En divisant par  $\frac{dX}{dx}$ , on en déduit l'égalité (4.2) à l'ordre  $k + 1$ . □

5. PRÉSERVATION DE LA RÉGULARITÉ.

Les résultats ci-dessus montrent, à l'aide de contre-exemples, qu'on peut perdre un ordre de régularité en utilisant des variations normales, mais ils ne nous disent pas si cette perte est systématique. Autrement dit, ne pourrait-on pas trouver des variations qui préservent la régularité ?

Les seules possibilités «générales» de la préserver sont, lorsque  $d = 2$  et  $m \geq 2$ , les suivantes.

— La régularité  $C^\infty$  : si  $\Gamma$  est  $C^\infty$ , alors  $\Gamma + t\alpha n$  est  $C^\infty$  pour tout  $\alpha$  de classe  $C^\infty$  dès que  $t$  est assez petit.

— Les variations d'amplitude constante : si  $\Gamma$  est au moins  $\text{Lip}^2$ , alors  $\Gamma + tn$  est aussi régulier que  $\Gamma$  dès que  $t$  est assez petit.

Hormis ces deux cas, les variations normales font perdre de la régularité d'après le résultat suivant.

**PROPOSITION 5.1.** *Soit  $\Gamma \in C^m$  dont aucune partie n'est  $C^{m+1}$ , avec  $d = 2$  et  $m$  réel,  $m \geq 2$ . Les seules fonctions  $\alpha$  de classe  $C^m$  et inférieures au rayon de courbure telles que  $\Gamma + \alpha n \in C^m$  sont les constantes.  $\square$*

On se limite aux variations  $C^m$  car, sinon, on pourrait toujours en trouver une dont l'irrégularité compense exactement celle de  $\Gamma$  de sorte que  $\Gamma + \alpha n$  soit  $C^\infty$  (en effet, étant donné  $\Gamma_1$  de classe  $C^\infty$  et voisin de  $\Gamma$ , il existe un et un seul  $\alpha$  tel que  $\Gamma + \alpha n = \Gamma_1$ !).

Mais une telle variation serait isolée au sens où aucune variation voisine ne préserverait la régularité de  $\Gamma$ . On suppose  $\alpha$  inférieur au rayon de courbure de  $\Gamma$  pour le même motif.

*Démonstration.* Supposons pour l'instant  $m$  entier. Étant donné  $z \in \Gamma$ , on choisit un système de coordonnées  $(x, y)$  d'origine  $z$  tel que le plan d'équation  $y = 0$  soit tangent à  $\Gamma$  en  $z$ . Dans ce repère,  $\Gamma$  est le graphe d'une fonction  $\Psi \in C^m([-a, a])$ ,  $a > 0$ . Une portion de la courbe déformée est  $\Gamma + \alpha n = \{(X(x), Y(x)) : |x| < a\}$  où

$$X(x) = x - \frac{\tilde{\alpha}(x)\Psi'(x)}{\sqrt{1 + |\Psi'(x)|^2}}, \quad Y(x) = \Psi(x) + \frac{\tilde{\alpha}(x)}{\sqrt{1 + |\Psi'(x)|^2}}$$

et  $\tilde{\alpha}(x) = \alpha(x, \Psi(x))$ .

Comme  $\alpha(z)$  est inférieur au rayon de courbure en  $z$ , il existe un intervalle  $[-a_*, a_*]$  dans lequel  $X' \geq c > 0$ . De plus  $X$  et  $Y$  sont  $C^{m-1}$  et

$$X^{(m-1)} = S_{m,1} - \frac{\tilde{\alpha}\Psi^{(m)}}{(1 + |\Psi'(x)|^2)^{3/2}}, \quad Y^{(m-1)} = S_{m,2} - \frac{\tilde{\alpha}\Psi^{(m)}\Psi'}{(1 + |\Psi'(x)|^2)^{3/2}}$$

où  $S_{m,i}$  désigne une fonction  $C^1$  dépendant des dérivées d'ordre 1 à  $m - 1$  de  $\tilde{\alpha}$  et  $\Psi$ . Il résulte donc du lemme 4.1 que  $\Gamma + \alpha n$  est le graphe d'une fonction  $F \in C^{m-1}([-A, A])$ . L'égalité (4.2) donne

$$F^{(m-1)} \circ X = S_{m,3} + \tilde{\alpha}\Psi^{(m)}\phi \tag{5.1}$$

où  $\phi = (Y' - X'\Psi')(1 + |\Psi'(x)|^2)^{-3/2}(X')^{-m}$ .

Par hypothèse,  $\Psi^{(m)}$  n'est  $C^1$  dans aucun voisinage de 0. Au contraire,  $\tilde{\alpha}$  et  $\phi$  sont  $C^1$ , donc  $F^{(m-1)}$  ne peut être  $C^1$  dans un voisinage de 0 que si



$\tilde{\alpha}(0)$  ou  $\phi(0) = 0$ . Cette dernière condition se réduit à  $Y'(0) = 0$  (puisque  $\Psi'(0) = 0$ ) qui elle-même donne  $\tilde{\alpha}'(0) = 0$ . Ceci ne peut être satisfait pour tout point  $z$  de  $\Gamma$  que si  $\alpha$  y est constant.

Réciproquement, quand  $\alpha$  est constant,  $\phi(0) = 0$  donc (5.1) montre que  $F^{(m-1)}$  est dérivable en 0, d'où  $\Gamma + \alpha n \in \mathbb{C}^m$ .

Lorsque  $m$  n'est pas entier, on remplace dans (5.1)  $m$  par sa partie entière  $M$ . Comme  $\Psi^{(M)}$  n'est  $C^{m-M}$  dans aucun voisinage de 0,  $F^{(M-1)}$  ne peut être  $C^1$  que si, à nouveau,  $\tilde{\alpha}(0)$  ou  $\tilde{\alpha}'(0) = 0$ . □

Cette démonstration montre donc que la régularité n'est préservée qu'aux points de  $\Gamma$  où  $\alpha$  ou sa dérivée tangentielle est nulle. Dans les autres points, on perd exactement un ordre de régularité.

Observons qu'en dimension  $d \geq 3$ , le résultat de la proposition 5.1 n'est plus vrai. En effet, si  $\Gamma$  est de la forme  $\Gamma_2 \times \mathbb{R}^{d-2}$ , les variations  $\alpha$  indépendantes de  $z_1$  et  $z_2$  préservent sa régularité. Pour la généraliser, il faudrait imposer que  $\Gamma$  ne soit  $\mathbb{C}^{m+1}$  dans «aucune direction».

Rappelons, pour être complet, que les variations réparties préservent la régularité. Plus précisément on a le résultat suivant, cf. [18] : Soient  $\Gamma \in \mathbb{C}^m$ ,  $m \geq 1$ , et  $u \in C^m(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  tels que  $|u(z) - u(z')| \leq c|z - z'|$  avec  $c < 1$ . Alors,

$$\Gamma + u \in \mathbb{C}^m.$$

Dans ce résultat  $\mathbb{C}^m$  et  $C^m$  peuvent être remplacés respectivement par  $\text{Lip}^m$  et  $\text{Lip}^m$  moyennant, lorsque  $m = 1$ , cf. [3], l'hypothèse supplémentaire  $c \leq c_\Gamma$  ( $\Gamma$  a alors la propriété du cône uniforme, et on peut choisir  $c_\Gamma = 1/(1 + \beta^2)^{1/2}$  où  $\beta$  est la pente du cône).

### 6. ANNEXE

L'objet du résultat suivant est de démontrer que l'ordre de régularité de la fonction  $\Psi$  ne dépend pas du système de coordonnées utilisé, pourvu que l'on se place dans un repère où  $\Psi$  existe et est lipschitzienne (par contre la fonction  $\Psi$ , elle-même, varie avec le repère).

LEMME 6.1. Soient  $m \geq 1$ ,  $\Gamma \in \mathbb{C}^m$ , des coordonnées cartésiennes  $(z_i)$  d'origine  $v \in \Gamma$ , un cylindre  $\Theta = \{z : |z_*| < a, |z_d| < a\}$  et une fonction  $\Psi \in \text{Lip}^1(\Theta_*)$  tels que :  $\forall z \in \Theta$ ,

$$z \in \Gamma \iff z_d = \Psi(z_*).$$

Alors il existe  $b > 0$  tel que

$$\Psi \in C^m(\Theta_*(b)). \quad \square$$

Démonstration. La définition 2.1 fournit un système de coordonnées  $(\hat{z}_i)$  d'origine  $v$ , un cylindre  $\hat{\Theta} = \{\hat{z} : |\hat{z}_*| < \hat{a}, |\hat{z}_d| < \hat{a}\}$  et une fonction  $\hat{\Psi} \in C^m(\hat{\Theta}_*)$  tels que :  $\forall \hat{z} \in \hat{\Theta}$ ,

$$\hat{z} \in \Gamma \iff \hat{z}_d = \hat{\Psi}(\hat{z}_*)$$

Les propriétés ci-dessus étant conservée par tout changement de variable qui préserve  $\widehat{z}_d$ , on peut se ramener au cas où

$$\widehat{z}_2 = z_2, \dots, \widehat{z}_{d-1} = z_{d-1}.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\widehat{z}_1 &= z_1 \cos \alpha + z_d \sin \alpha, \\ \widehat{z}_d &= -z_1 \sin \alpha + z_d \cos \alpha.\end{aligned}$$

La propriété  $z \in \Gamma \cap \Theta(\widehat{a})$  est donc équivalente à  $\Phi(z) = 0$  où

$$\Phi(z) = -z_1 \sin \alpha + z_d \cos \alpha - \widehat{\Psi}(z_1 \cos \alpha + z_d \sin \alpha, z_2, \dots, z_{d-1}).$$

Par hypothèse, elle est aussi équivalente à  $z_d - \Psi(z_*) = 0$  si  $z \in \Theta(a)$ . Donc

$$\Phi(z_*, \Psi(z_*)) = 0$$

pour tout  $z_* \in \Theta_*(b)$  où  $b = \inf(a, \widehat{a})$ . Comme  $\Psi \in \text{Lip}^1(\Theta_*)$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial z_d}(z_*, \Psi(z_*))$  ne s'annule pas dans  $\Theta_*(b)$ . Les propriétés de dérivabilité de la solution d'une équation implicite montrent alors que  $\Psi \in C^m(\Theta_*(b))$ .  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Bandle : Existence theorems, qualitative results and a priori bounds for a class of non-linear Dirichlet problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 58 1975, 219–238.
- [2] C. Bardos, O. Pironneau : Petites perturbations et équations d'Euler pour l'aéroélasticité. *M<sup>2</sup>AN*, **28**, 1994, 463–497.
- [3] J. Bello, E. Fernández-Cara, J. Lemoine, J. Simon : The differentiability of the drag with respect to the variations of a lipschitz domain in a Navier-Stokes flow. *SIAM J. Control Optim.*, **35**, n° 2 1997, 626–640.
- [4] O. Bodart, P. Demeestère : Sentinels for the identification of an unknown boundary. *Math. Models. Methods Appl. Sci.*, **7**, n° 6 1997, 871–885.
- [5] D. Bresch, J. Simon : A remark on the loss of regularity due to normal variations of a domain. *Z. Angew Math. Mech.*, **76**, suppl. 2 *ICIAM/GAMM 95, Applied Analysis* 1996, 193–196.
- [6] D. Chenais, J. Monnier, J.-P. Vila : Optimisation de forme pour un système fluide-thermique. Application à l'industrie automobile. *27<sup>e</sup> Congrès d'Analyse Numérique*, Super-Besse 1995.
- [7] M. Chouilli, A. Henrot : Use of domain derivative to prove symmetry results in partial differential equations. *Prépublication de Besançon*, n° 31, 1994.
- [8] E. Fernández-Cara : Sobre la aproximación numérica de un problema de control geométrico. *Collectánea Matemática*, **3** (XXXIII), 1982, 225–247.
- [9] R.H. Gallagher, O.C. Zienkiewicz : *Optimal structural design*. Wiley, New York 1973.
- [10] P.R. Garabedjian, M.M. Schiffer : Convexity of domain functionals. *J. Anal. Math.* **2** 1953, 181–263.
- [11] P. Guillaume : Dérivées d'ordre supérieures en conception optimale de forme. *Thèse*, Université Paul Sabatier, Toulouse 1994.
- [12] J. Hadamard : Mémoire sur le problème d'analyse relatif des plaques élastiques encadrées. *Oeuvres de J. Hadamard*, **2** 1907 Ed. C.N.R.S., Paris 1968.
- [13] A. Henrot, M. Pierre : *Optimisation de forme : aspect théorique*. À paraître.

- [14] T. Masanao, N. Fujii : Second-order necessary conditions for domain optimization problems in elastic structures. *J. Optim. Theory Appl.*, **72**, n° 2 1992, 355–402.
- [15] M. Masmoudi : Outils pour la conception optimale de formes. *Thèse d'état*, Université de Nice 1987.
- [16] F. Mignot, F. Murat, J.-P. Puel : Variations d'un point de retournement par rapport au domaine. *Comm. P.D.E.*, **4** 1979, 1263–1297.
- [17] B. Morel : Utilisation en analyse numérique de la formule de variation de Hadamard. *R.A.I.R.O.*, **R-2** 1973, 115–119 .
- [18] F. Murat, J. Simon : Sur le contrôle par un domaine géométrique. Rapport du L.A. 189 n° 76015, Université Pierre et Marie Curie, Paris 1976.
- [19] O. Pironneau : *Optimal shape design for elliptic systems*. Springer-Verlag, New York 1984.
- [20] P.-A. Raviart : Problèmes de perturbations singulières et modèles limites sur les équations de Vlasov-Maxwell. *27<sup>e</sup> Congrès National d'Analyse Numérique*, Super-Besse 1995.
- [21] B. Rousselet : Quelques résultats en optimisation de domaines. *Thèse d'Etat*, Université de Nice 1982.
- [22] J. Simon : Differentiation with respect to the domain in boundary value problems. *Numer. Funct. Optimiz.*, **2** (78) 1980, 649–687.