ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations September 2001, Vol. 6, 561–592
URL: `http://www.emath.fr/cocv/`

UNICITÉ ET CONTRÔLE POUR LE SYSTÈME DE LAMÉ

Mourad Bellassoued[1]

Abstract. In this paper, we study the uniqueness problem for the Lamé system. We prove that we have the uniqueness property across any non characteristic surface. We also give two results which apply to the boundary controllability for the Lamé system.

Résumé. Dans cet article on étudie le problème de l'unicité locale pour le système de Lamé. On prouve qu'on a l'unicité de Cauchy par rapport à toute surface non caractéristique. Nous donnons également deux résultats de densité qui s'applique à la théorie du contrôle pour le système de Lamé.

Classification mathématique. 35A07, 73B05, 35Q75.

Reçu le 6 janvier 1999. Révisé le 5 mai 2000, et les 9 janvier et 8 mai 2001.

Sommaire

Mots-clés et phrases: Uniqueness, controllability, elastic wave equation.

[1] Faculté des Sciences de Bizerte, Département des Mathématiques, 7021 Jarzouna Bizerte, Tunisie ;
e-mail: `mourad.bellassoued@fsb.rnu.tn`

1. Introduction

Nous nous intéressons ici au problème de l'unicité de Cauchy pour les solutions du système de Lamé, qui représente les déformations élastiques d'un solide. Dans le cas isotrope, le système de Lamé s'écrit en $n-$ dimension de l'espace :

$$P(t,x;\partial_t,\partial_x) = (\partial_t^2 - \mu(t,x)\Delta)id_n - \nu(t,x)\nabla(\mathrm{div}\,\cdot) + R(t,x;\partial_t,\partial_x) \tag{1.1}$$

où R est un opérateur différentiel matriciel d'ordre inférieur ou égal à 1. La première motivation pour étudier ce type de problèmes est la théorie du contrôle. En effet Lions [11] introduit la méthode H.U.M (Hilbert Uniqueness Method) qui consiste à étudier l'ensemble des conditions initiales d'un problème d'évolution qui peuvent être annulées en un temps fini T en exerçant un contrôle d'énergie fini sur le bord. Ce résultat repose d'une façon fondamentale sur un théorème d'unicité, qui permet de construire un espace de Hilbert dense dans l'espace d'énergie. Ce théorème d'unicité est une conséquence du théorème de Holmgren dans le cadre analytique. Dans le cas d'un opérateur hyperbolique, scalaire, d'ordre deux, $\partial_t^2 - A(t,x,\partial_x)$, Alinhac [1] et Alinhac–Baouendi [2] ont montré que la régularité C^∞ des coefficients de l'opérateur elliptique A ne suffit pas pour avoir l'unicité par rapport à une surface de type temps. En effet il existe deux fonctions de classe C^∞ $a(t,x)$ et $u(t,x)$ telles que $(\partial_t^2 - \Delta + a(t,x))u(t,x) = 0$ dans un voisinage V de $(t,x) = (0,0)$ et $\mathrm{Supp} u \subset \{x = (x_1,x'); x_1 \geq -\delta|x'|\}$ où $\delta > 0$.

Par la suite, il a été observé par Robbiano [12], que lorsque l'opérateur A ne dépend pas du temps on a un résultat d'unicité adapté à la théorie de contrôle. Ce résultat a été amélioré, dans un premier temps, par Hörmander [6] qui a donné une estimation précise et quasiment optimale du temps minimal pendant lequel le contrôle doit agir, puis par Tataru [15]. Récemment, Robbiano–Zuily [13] d'une part et Hörmander [7] d'autre part ont démontré un théorème d'unicité locale pour les opérateurs différentiels, scalaires, à coefficients C^∞, partiellement holomorphes, où les hypothèses usuelles de Hörmander (principale normalité et pseudo-convexité) sont faites uniquement sur le conormal des variables analytiques. Dans ce travail, on se propose, en se restreignant au cas du système de Lamé, d'étendre le résultat de [13] sous l'hypothèse d'analyticité en temps des coefficients μ et ν de l'opérateur P. Puis nous adaptons ce théorème d'unicité locale au contrôle du système de Lamé.

La littérature concernant ce type de problèmes est peu fournie. En effet, on ne dispose pas de techniques générales de résolution d'un tel problème autre que celle de multiplier le système par la matrice des cofacteurs, et d'utiliser la méthode des inégalités de Carleman scalaires pour le déterminant (voir Isakov [9]). Mais cette méthode élève la multiplicité des caractéristiques ce qui rend très difficile la preuve des résultats permettant d'établir une inégalité de Carleman.

Dans le cas où les coefficients de l'opérateur ne dépendant pas du temps et en dimension 3 d'espace, Eller–Isakov–Nakamura–Tataru [5] prouvent un résultat d'unicité pour le système de Lamé sans aucune perturbation d'ordre inférieure. La preuve est basée sur la décomposition de la solution u en une onde transversale $\mathrm{div}(u)$ et une onde longitudinale $\mathrm{rot}(u)$ (ce qui est possible en dimension 3) vérifiant chacune une équation d'onde scalaire, pour ensuite appliquer le théorème de Tataru dans le cas scalaire.

Nous signalons aussi que dans le cas stationnaire du système de Lamé Dehman–Robbiano [4] ont montré la propriété du prolongement unique.

Dans le cas stationnaire du système de Lamé avec une perturbation d'ordre inférieure assez particulière, Ang–Ikehata–Trang–Yamamoto [3] donnent une preuve plus simple du prolongement unique que celle de [4]. La preuve est basée sur la transformation du système de Lamé en un système de type principal. Ceci repose d'une façon fondamentale sur la structure du terme d'ordre inférieur et cette méthode semble très sensible pour une perturbation quelconque.

2. Notations. Énoncés des résultats

2.1. Unicité de Cauchy

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, le point générique de $\mathbb{R}\times\Omega$ est noté (t,x) avec $t\in\mathbb{R}$, $x\in\Omega$; les variables duales de (t,x) sont (τ,ξ). On note $D_{x_j}=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Le symbole principal du système de Lamé est donné par la matrice réelle

$$p(t,x;\tau,\xi)=(\tau^2-\mu(t,x)|\xi|^2)id_n-\nu(t,x)\xi^t\xi \tag{2.1}$$

id_n désigne la matrice identité. On fait l'hypothèse

$$\begin{cases}\text{il existe une constante } C_0>0 \text{ tel que si on pose } \omega=\{z\in\mathbb{C};|z|<C_0\}\\ \text{et } \omega'=\{x\in\mathbb{R}^n;|x|<C_0\} \text{ alors les coefficients } \mu \text{ et } \nu \text{ appartiennent à}\\ C^\infty(\omega';\mathcal{H}(\omega))\ ;\quad \mathcal{H}(\omega) \text{ désigne l'espace des fonctions holomorphes.}\end{cases} \tag{2.2}$$

En particulier si μ et ν ne dépendent pas du temps, la condition (2.2) est vérifiée.

On suppose de plus que l'opérateur R à coefficients analytiques en t est C^∞ en x.

Définition 1. Soit $\varphi(t,x)$ une fonction de classe $\mathbb{C}^2$ telle que $\varphi'(t,x)\neq 0$ et S l'hypersurface donnée, localement au voisinage de (t_0,x_0), par $S=\{\varphi(t,x)=0\}$. On dit que S est non caractéristique pour P si la matrice $p(t,x,\varphi'_t,\varphi'_x)$ est inversible au voisinage de (t_0,x_0).

Théorème 2.1. *Soit P l'opérateur différentiel défini par (1.1), S une hyper-surface orientée $S=\{\varphi(t,x)=\varphi'(t_0,x_0)=0\}$ non caractéristique par rapport à P en (t_0,x_0). On suppose qu'il existe un voisinage V de (t_0,x_0) tel que $Pu=0$ sur V et $V\cap supp(u)\subset S^+=\{\varphi>0\}$. Alors $u\equiv 0$ sur un voisinage de (t_0,x_0). Autrement dit P possède l'unicité de Cauchy par rapport à S près de (t_0,x_0).*

2.2. Adaptation à la théorie du contrôle

Dans ce qui suit on note $\partial\Omega$ le bord de Ω, Γ un ouvert de $\partial\Omega$; $\Sigma=]0,T[\times\Gamma$, n désigne le vecteur normal extérieur à Σ, et $\frac{\partial}{\partial n}$ la dérivée dans cette direction et on suppose que μ et ν sont indépendants de t et $\forall x\in\overline{\Omega}$, $\mu(x)>0$, $\nu(x)>0$. Introduisons les espaces

$$E_0=[H_0^1(\Omega)]^n\oplus[L^2(\Omega)]^n,\qquad E_{-1}=[L^2(\Omega)]^n\oplus[H^{-1}(\Omega)]^n.$$

Soit $x_0\in\Gamma$; on munit Ω de la métrique $\frac{1}{\mu(x)}dx^2$ et on introduit le temps d'unicité T_0,

$$T_0=2\sup\{d(x_0,x);x\in\overline{\Omega}\}$$

où $d(x_0,x)$ désigne la distance entre x_0 et x,

$$d(x_0,x):=\inf\{\mathrm{long}(C):C[0,1]\longrightarrow\Omega\ :\ C^1\ \text{ et tel que }\ C(0)=x_0\ \text{ et }\ C(1)=x\}$$

avec

$$\mathrm{long}(C):=\int_0^1\left[\mu^{-1}(C(s))(\dot{C}_1(s)^2+\ldots+\dot{C}_n(s)^2)\right]^{1/2}\mathrm{d}s. \tag{2.3}$$

On note l'opérateur elliptique d'ordre deux, dit le Laplacien élastique, par

$$\Delta_e u=\sum_{j=1}^n\partial_j(\mu(x)\partial_j u)+\nabla(\nu(x)\mathrm{div}u). \tag{2.4}$$

2.2.1. *Contrôle du système de Lamé avec une action de type Dirichlet*

Pour $T > T_0$, soit F_D l'espace des conditions initiales (u^0, u^1) tel qu'il existe un contrôle $g \in (L^2(\Sigma))^n$ et la solution du problème d'évolution

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_e u = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega \\ u_{|t=0} = u^0; \quad \partial_t u_{|t=0} = u^1 & \text{dans } \Omega \\ u = g \cdot \mathbf{1}_\Sigma & \text{sur } \mathbb{R} \times \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

vérifie $u(T, \cdot) = \partial_t u(T, \cdot) \equiv 0$ dans Ω.

Théorème 2.2. *F_D est dense dans E_0.*

2.2.2. *Contrôle du système de Lamé avec action de type Neumann*

Pour $T > T_0$, soit F_N l'espace des conditions initiales (u^0, u^1) tel qu'il existe $g \in (H^{3/2}(\mathbb{R} \times \partial\Omega))^n$ à support dans Σ et la solution du problème d'évolution

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_e u = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \Omega \\ u_{|t=0} = u^0; \quad \partial_t u_{|t=0} = u^1 & \text{dans } \Omega \\ \mu(x)\frac{\partial u}{\partial n} + (\nu(x) \operatorname{div} u) n = g \cdot \mathbf{1}_\Sigma & \end{cases} \tag{2.6}$$

vérifie $u(T, \cdot) = \partial_t u(T, \cdot) \equiv 0$ dans Ω.

Théorème 2.3. *F_N est dense dans $(H^1(\Omega))^n \oplus (L^2(\Omega))^n$.*

La preuve du théorème 2.2 est basée sur l'usage de la transformation de Fourier–Bros–Iagolnitzer (F.B.I), qui permet, en utilisant l'hypothèse d'analyticité et des changements de contours dans $\mathbb{C}$, de localiser l'opérateur en fréquence modulo des restes. Après être revenu vers le réel par une transformation inverse, on montre une inégalité de Carleman par les techniques usuelles de Lerner [10]. Dans la section 3 on rappelle quelques propriétés de la transformation F.B.I.

On introduit tout d'abord quelques notations : $S(\mathbb{R}^{n+1})$ désigne l'espace de Schwartz des fonctions sur $\mathbb{R}^{n+1}$ à décroissance rapides.

Si $\xi \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle\xi\rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$.

Si $m \in \mathbb{R}$, $H^m_{sc}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Sobolev semi-classique

$$H^m_{sc} = \left\{ u \in L^2; \left(1 + \frac{|\xi|^2}{\lambda^2}\right)^{m/2} \hat{u}(\xi) \in L^2 \right\} \tag{2.7}$$

muni de la norme

$$||u||^2_{H^m_{sc}} = \int \left(1 + \frac{|\xi|^2}{\lambda^2}\right)^m |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi$$

où λ est un paramètre destiné à tendre vers $+\infty$. De même on note

$$||u||^2_{L^2(\mathbb{R}, H^m_{sc})} = \int_{\mathbb{R}} ||u(t, \cdot)||^2_{H^m_{sc}} \mathrm{d}t$$

pour $u \in S(\mathbb{R}^{n+1})$. Enfin on introduit la classe de symbole $S(\langle\xi\rangle^2; g)$ où g est la métrique de Hörmander (voir [8]) $g = \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}\tau^2 + \frac{\mathrm{d}\xi^2}{\langle\xi\rangle^2}$ et on note $\{,\}$ le crochet de Poisson.

3. Transformation de Fourier–Bros–Iagolnitzer (F.B.I)

3.1. Propriétés élémentaires

Dans ce paragraphe, rappelons quelques propriétés de la transformation de Fourier–Bros–Iagolnitzer (F.B.I) partiel, dans sa version la plus standard, définie par la formule suivante :

$$u \in S(\mathbb{R}^{n+1}), \quad Tu(z,x,\lambda) = C(\lambda)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}(z-y)^2} u(y,x)\mathrm{d}y \tag{3.1}$$

pour $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \geq 1$ et $C(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/4}$.

La fonction Tu est entière par rapport à z. On note

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}(\Im z)^2 \ \text{ pour } \ z \in \mathbb{C} \tag{3.2}$$

$$\Lambda_\Phi = \Big\{(z,\tau) \in \mathbb{C}^2, \ \ \tau = \frac{2}{i}\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z)\Big\} = \big\{(z,\tau) \in \mathbb{C}^2, \ \ \tau = -\Im(z)\big\}\cdot \tag{3.3}$$

$$K_T(t,\tau) = (t - i\tau, \tau). \tag{3.4}$$

Plus généralement on note la transformation F.B.I associée à la phase $\frac{i}{2}(1+\eta)(z-y)^2$ avec η un paramètre réel assez petit,

$$T_\eta(z,x;\lambda) = C(\lambda)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}(1+\eta)(z-y)^2} u(y,x)\mathrm{d}y. \tag{3.5}$$

On note ainsi,

$$K_{T_\eta}(t,\tau) = \Big(t - \frac{i}{1+\eta}\tau, \tau\Big). \tag{3.6}$$

On introduit également

$$L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C}, H^k(\mathbb{R}^n)) = L^2\Big(\mathbb{C}, \mathrm{e}^{-2\lambda(1+\eta)\Phi(t)}L(\mathrm{d}t); H^k(\mathbb{R}^n)\Big) \tag{3.7}$$

avec $L(\mathrm{d}t)$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}$, $H^k(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Sobolev usuel.

$$\text{Si } \ k=0 \ \text{ on note } \ L^2_{(1+\eta)\Phi}\big(\mathbb{C}, H^0(\mathbb{R}^n)\big) = L^2_{(1+\eta)\Phi} \tag{3.8}$$

$$\mathcal{L}^2_{(1+\eta)\Phi} = L^2_{(1+\eta)\Phi} \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}) \tag{3.9}$$

où $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ désigne l'espace des fonctions holomorphes.

Proposition 3.1. *On a les propriétés suivantes :*

1. *T_η est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}, H^k(\mathbb{R}^n))$ dans $L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C}, H^k(\mathbb{R}^n))$;*
2. *$T^*_\eta T_\eta = id_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$ avec T^*_η l'adjoint de T_η ;*
3. *$T_\eta \cdot T^*_\eta$ est la projection de $L^2_{(1+\eta)\Phi}$ dans $\mathcal{L}^2_{(1+\eta)\Phi}$.*

En particulier $T_\eta T^*_\eta \tilde{v} = \tilde{v}$ si $\tilde{v} = Tv$ où $v \in S(\mathbb{R}^{n+1})$.

3.2. Transformation F.B.I et opérateurs différentiels

Dans cette section, on va étudier l'action de la transformation F.B.I sur un opérateur différentiel d'ordre m. Précisons tout d'abord quelques notions. $P = op_\lambda^w(p)$ désigne l'opérateur obtenu par la quantification de Weyl de symbole p en semi-classique. On a, pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

$$Pu(x) = \Big(\frac{\lambda}{2\pi}\Big)^{n+1} \iint \mathrm{e}^{i\lambda(x-y)\cdot\xi} p\Big(\frac{x+y}{2}, \lambda\xi\Big) u(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}\xi. \tag{3.10}$$

Soit $\psi(t,x)$ un polynôme quadratique réel dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On définit l'opérateur différentiel P_λ

$$P_\lambda = \lambda^{-2} \mathrm{e}^{\lambda\psi} P \mathrm{e}^{-\lambda\psi}. \tag{3.11}$$

On a par un calcul élémentaire

$$\mathrm{e}^{\lambda\psi} D_{x_j} \mathrm{e}^{-\lambda\psi} = D_{x_j} + i\lambda\psi'_{x_j} \tag{3.12}$$

et par la formule de Segal le symbole de Weyl de P_λ est exactement $p(x, \xi + i\psi')$.

Proposition 3.2 (voir [13]). *Pour $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ on a $TP_\lambda v = \widetilde{P}_\lambda T v$ où*

$$\widetilde{P}_\lambda T v(t,x;\lambda) = \Big(\frac{\lambda}{2\pi}\Big)^{n+1} \iint \mathrm{e}^{i\lambda(y-x)\cdot\xi} \Big(\iint_{\tau = -\mathrm{Im}\left(\frac{t+y_0}{2}\right)} \omega \Big) \mathrm{d}y \mathrm{d}\xi \tag{3.13}$$

au sens des intégrales oscillantes où ω est une forme différentielle donnée par

$$\begin{aligned} \omega \quad = \quad & \mathrm{e}^{i\lambda(t-y_0)\cdot\tau} p\Big(\frac{t+y_0}{2} + i\tau, \frac{x+y}{2}; \tau + i\psi'_t\Big(\frac{t+y_0}{2} + i\tau, \frac{x+y}{2}\Big); \\ & \xi + i\psi'_x\Big(\frac{t+y_0}{2} + i\tau, \frac{x+y}{2}\Big)\Big) \cdot Tv(y_0, y; \lambda) \mathrm{d}y_0 \wedge \mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{3.14}$$

3.3. Localisation en fréquence

Soit d un nombre réel positif tel que $d \ll C_0$, et soit $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ à support dans $\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t|+|x| < d\}$ et $\widetilde{P}_\lambda$ l'opérateur défini dans la proposition 3.2. Dans ce paragraphe, on microlocalise $\widetilde{P}_\lambda$ en fréquence près de $\tau = 0$, moyennant des restes exponentiellement petits. C'est l'objet de la proposition suivante:

Proposition 3.3 (voir [13]). *Il existe une troncature $\chi \in C_0^\infty(C^2)$, vérifiant*

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| + |\tau| \le \frac{d}{2} \\ 0 & \text{si } |t| + |\tau| > d \end{cases} \tag{3.15}$$

telle que si on pose pour $\eta \in]0,1]$

$$\widetilde{Q} T v(t,x,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n+1} \iint \mathrm{e}^{i\lambda(x-y).\xi} \left(\iint_{\tau = -(1+\eta)\Im\frac{t+y_0}{2}} \chi\left(\frac{t+y_0}{2}, \tau\right) \omega \right) \mathrm{d}y_0 \, \mathrm{d}\xi \tag{3.16}$$

où ω défini par (3.14), alors

$$\widetilde{P}_\lambda T v = \widetilde{Q}_\lambda T v + \widetilde{R}_\lambda T v + \widetilde{g}_\lambda \tag{3.17}$$

avec, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$||\widetilde{R}_\lambda Tv||_{L^2_{(1+\eta)\Phi}} \leq \frac{C_N}{\lambda^N} ||Tv||_{L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C},H^2(\mathbb{R}^n))}. \tag{3.18}$$

$$||\widetilde{g}_\lambda Tv||_{L^2_{(1+\eta)\Phi}} = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{3}\eta d^2}) \qquad \lambda \to \infty. \tag{3.19}$$

3.4. Retour vers le réel

Soit $\widetilde{Q}_\lambda$ l'opérateur défini dans (3.16). Soit v dans $S(\mathbb{R}^{n+1})$ et soit $w = T^*_\eta Tv$, on a d'après la proposition 3.1(iii)

$$w = T^*_\eta Tv \,\in\, S(\mathbb{R}^{n+1}) \qquad \text{et } T_\eta w = Tv. \tag{3.20}$$

Il résulte alors d'après la proposition 3.2 (avec T_η à la place de T)

$$\widetilde{Q}_\lambda Tv = \widetilde{Q}_\lambda T_\eta w = T_\eta Q_\lambda w, \tag{3.21}$$

où Q_λ est un opérateur différentiel dont le symbole de Weyl est

$$\sigma^w(Q_\lambda)(t,\tau;x,\xi) = \sigma^w(\widetilde{Q}_\lambda)(K_{T_\eta}(t,\tau);x,\xi) \tag{3.22}$$

avec

$$\sigma^w(\widetilde{Q}_\lambda)(z,x;x,\xi) = \chi(z,\tau)p(z+i\tau, x, \tau + i\psi'_t(z+i\tau,x), \xi + i\psi'_x(z+i\tau,x)). \tag{3.23}$$

Revenons maintenant au système de Lamé dont la symbole principal de Weyl quantifié en semi-classique est donné par

$$p_\lambda(t,x;\tau,\xi) = \Big[(\tau+i\psi'_t)^2 - \mu^t(\xi+i\psi'_x)(\xi+i\psi'_x)\Big] id_n - \nu(t,x)(\xi+i\psi'_x)^t(\xi+i\psi'_x). \tag{3.24}$$

On a donc

$$\sigma^w(Q_\lambda)(z,x;x,\xi) = \sum_{j=0}^{2} \lambda^{-j} q_{2-j}(t,x;\tau,\xi) \tag{3.25}$$

avec le symbole principale q_2 donné par

$$\begin{aligned} q_2(t,x;\tau,\xi) \quad = \quad & \chi\Big(t - i\frac{\tau}{1+\eta},\tau\Big)\Big[\Big(\tau + i\psi'_t\Big(t+i\frac{\eta}{1+\eta}\tau,x\Big)\Big)^2 \\ & -\mu\Big(t+i\frac{\eta}{1+\eta}\tau,x\Big)^t\Big(\xi+i\psi'_x\Big(t+i\frac{\eta}{1+\eta}\tau,x\Big)\Big)\Big(\xi+i\psi'_x\Big(t+i\frac{\eta}{1+\eta}\tau,x\Big)\Big)\Big]id_n \\ & -\nu\Big(t+i\frac{\eta}{1+\eta}\tau,x\Big)\Big(\xi+i\psi'_x\Big(t+i\frac{\eta}{1+\eta}\tau,x\Big)\Big)^t\Big(\xi+i\psi'_x\Big(t+i\frac{\eta}{1+\eta}\tau,x\Big)\Big). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Dans tout ce qui suit on pose

$$\zeta_0 = \tau + i\psi'_t\Big(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x\Big); \qquad \zeta = \xi + i\psi'_x\Big(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x\Big)$$

$$\mu = \mu\Big(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x\Big); \qquad \nu = \nu\Big(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x\Big).$$

On a alors

$$q_2(t,x;\tau,\xi) = \chi\Big(t - i\frac{\tau}{1+\eta}, \tau\Big)\Big[(\zeta_0^2 - \mu^t\zeta.\zeta)id_n - \nu\zeta^t\zeta\Big]. \tag{3.27}$$

4. Inégalité de Carleman pour l'opérateur Q_λ

Dans cette section, on se propose d'établir une inégalité de Carleman pour l'opérateur $\widetilde{Q}_\lambda$ de symbole principal q_2 au moyen d'une technique du type inégalité de Gårding.

En toute généralité, on peut supposer $t_0 = 0$, $x_0 = 0$. On précise le choix de la fonction ψ, et on pose

$$\psi(y) = \varphi'(0).y + \frac{1}{2}\varphi''(0)(y,y) + \beta(\varphi'(0).y)^2 - \frac{1}{\beta}|y|^2 \quad avec\ \ y = (t,x). \tag{4.1}$$

Le paramètre β sera fixé assez grand plus loin.

Proposition 4.1. *Il existe des constantes $C_1 > 0$, $\beta_0 > 0$ telles que $\forall\beta \geq \beta_0$, $\exists\lambda_0$, η_0 et C_β tels que $\forall\lambda \geq \lambda_0$, $\forall\eta \in]0,\eta_0]$, $\exists\theta \in C_0^\infty$ vérifiant*

$$\theta(t,x,\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| + |\tau| + |x| \leq \dfrac{1}{4\beta^4} \\ 0 & \text{si } |t| + |\tau| + |x| > \dfrac{1}{\beta^4} \end{cases} \tag{4.2}$$

et telle que pour tout $u \in S(\mathbb{R}^{n+1})$ à support dans $\{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |x| \leq \frac{1}{\beta}\}$ on a :

$$\frac{\beta^2 C_1}{\lambda^2}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \leq ||op^w_\lambda(q_2)u||^2_{L^2} + \frac{C_\beta}{\lambda}||op^w_\lambda((1-\theta)\langle\xi\rangle^4)u||^2_{L^2(R,H^{-2}_{sc})}. \tag{4.3}$$

Corollaire 4.1. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, θ (θ définie par la Prop. 4.1) et λ_0 tels que $\forall\lambda \geq \lambda_0$, et $\forall u \in S(\mathbb{R}^{n+1})$ à support dans $\{(t,x);|x| \leq \varepsilon_0\}$ on a :*

$$\frac{C_1}{\lambda^2}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_\lambda)} \leq \lambda^4||Q_\lambda u||^2_{L^2} + C_2\lambda^3||op^w_\lambda(1-\theta)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_\lambda)} \tag{4.4}$$

avec $H^m_\lambda = \big\{u \in L^2; (\lambda^2 + |\xi|^2)^{m/2}\hat{u} \in L^2\big\}$.

Remarque 4.1.

1. Pour démontrer le corollaire 4.1, il suffit de fixer dans l'inégalité (4.3) β assez grand, puis η assez petit, de façon à absorber les termes d'erreurs provenant du côté droit de l'inégalité par le terme de gauche.
2. La preuve se décompose en plusieurs étapes. On va tout d'abord réduire par une jordanisation le symbole q_2 en un symbole presque diagonal $\hat{q}_2$, comportant un seul bloc de Jordan d'ordre deux. Dans une deuxième étape, on utilise la géométrie particulière de $\hat{q}_2$ pour établir une inégalité de Carleman. Enfin, l'estimation sur $\hat{q}_2$ sera traduite en estimation sur q_2.

4.1. Inégalité de Carleman scalaire

Dans cette section, on détermine les valeurs propres de q_2 et on se propose de montrer une inégalité de Carleman scalaire. Commençons par chercher le déterminant de la matrice q_2. Pour ceci on va distinguer deux cas selon la position de ζ et $\overline{\zeta}$; on rappelle que

$$q_2(t,x;\tau,\xi) = \chi\Big(t - i\frac{\tau}{1+\eta},\tau\Big)\big[(\zeta_0^2 - \mu^t\zeta\zeta)id_n - \nu\zeta^t\zeta\big]. \tag{4.5}$$

i) Si ζ et $\overline{\zeta}$ sont libres, on considère alors $(\theta_1,\dots,\theta_{n-2})$ une base de $(\zeta,\overline{\zeta})^\perp$ telle que θ_j est orthogonal à ζ et $\overline{\zeta}$ (*i.e.* ${}^t\theta_j\cdot\zeta = {}^t\theta_j\cdot\overline{\zeta} = 0$). Dans la base $(\theta_1,\dots,\theta_{n-2},\zeta,\overline{\zeta})$, la matrice q_2 s'écrit

$$\hat{q}_2(t,x;\tau,\xi) = \chi\Big(t - i\frac{\tau}{1+\eta},\tau\Big)\begin{pmatrix} (\zeta_0^2-\mu^t\zeta\zeta)id_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_0^2-(\mu+\nu)^t\zeta\zeta & -\nu|\zeta|^2 \\ 0 & 0 & \zeta_0^2-\mu^t\zeta\zeta \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

ii) Si ${}^t\zeta\zeta \neq 0$, soit $(\theta'_1,\dots,\theta'_{n-1})$ une base de $(\overline{\zeta})^\perp$, (*i.e.* ${}^t\theta'_j\cdot\zeta = 0$) alors q_2 s'écrit dans la base $(\theta'_1,\dots,\theta'_{n-1},\zeta)$

$$D = \begin{pmatrix} (\zeta_0^2-\mu^t\zeta\zeta)id_{n-1} & 0 \\ 0 & \zeta_0^2-(\mu+\nu)^t\zeta\zeta \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

On en conclut que

$$\det[q_2(t,x;\tau,\xi)] = \chi^n\big(t - i\frac{\tau}{1+\eta},\tau\big)[\zeta_0^2-\mu^t\zeta\zeta]^{n-1}[\zeta_0^2-(\mu+\nu)^t\zeta\zeta]$$

et que les valeurs propres de q_2 (près de $t=\tau=0$) sont $\zeta_0^2-\mu^t\zeta\zeta$ et $\zeta_0^2-(\mu+\nu)^t\zeta\zeta$ de multiplicité respectivement $n-1$ et 1 ; alors on a les trois cas suivants :

1^er^ cas. Loin de $\zeta_0^2-\mu^t\zeta\zeta=0$ et $\zeta_0^2-(\mu+\nu)^t\zeta\zeta=0$, la matrice q_2 est inversible (près de $t=0$ et $\tau=0$).

2^e^ cas. Près de $\zeta_0^2-\mu^t\zeta\zeta=0$ et $\zeta_0^2-(\mu+\nu)^t\zeta\zeta=0$, alors nous sommes près de $\zeta_0=0$ et ${}^t\zeta\zeta=0$, et donc ζ et $\overline{\zeta}$ sont libres et la matrice q_2 est semblable à la matrice $\hat{q}_2$.

3^e^ cas. Près de $\zeta_0^2-\mu^t\zeta\zeta=0$ et loin de $\zeta_0^2-(\mu+\nu)^t\zeta\zeta=0$ (resp. loin de $\zeta_0^2-\mu^t\zeta\zeta=0$ et près de $\zeta_0^2-(\mu+\nu)^t\zeta\zeta=0$), alors ${}^t\zeta\zeta\neq 0$ et donc q_2 est diagonalisable et a pour forme (4.7).
On note V_1 un voisinage de $\{(t,x;\tau,\xi);\ \zeta_0^2-\mu^t\zeta\zeta=0\}$ et V_2 un voisinage de $\{(t,x;\tau,\xi);\ \zeta_0^2-(\mu+\nu)^t\zeta\zeta=0\}$ alors on a le lemme suivant :

Lemme 4.1. *On a les propriétés suivantes :*

1. *sur* $V_1\cap V_2$ *la matrice* q_2 *est semblable à la matrice* $\hat{q}_2$ *définie dans (4.6) ;*
2. *sur* $(V_1\cup V_2)^c$ *la matrice* q_2 *est inversible ;*
3. *sur* $(V_1\cap V_2^c)\cup(V_2\cap V_1^c)$ *la matrice* q_2 *est diagonalisable et semblable à la matrice* D *définie dans (4.7).*

Remarque 4.2. Dans le cas du système de Lamé les singularités se propagent dans Ω le long de deux rayons aux vitesses $C_1=\sqrt{\mu}$ et $C_2=\sqrt{\mu+\nu}$ qui sont interprétés comme vitesses de propagation des ondes de distorsion et ondes de dilation.

Pour montrer la proposition 4.1 on va commencer par montrer une inégalité de Carleman pour les valeurs propres de q_2. Pour ceci on a besoin du lemme suivant, dont la preuve figure en appendice A.

Lemme 4.2. *Soit $\gamma(t,x)$ une fonction réelle analytique par rapport à t et C^∞ par rapport à la variable x telle que $\gamma(0)|\psi'_x(0)|^2 - \psi'_t(0) \neq 0$ et soit*

$$a(t,x;\tau,\xi) = \chi\left(t - i\frac{\tau}{1+\eta}, \tau\right)\left[\zeta_0^2 - \gamma\left(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x\right)^t \zeta\zeta\right] \tag{4.8}$$

alors il existe C_1, C_2, ε_2 et β_0 des constantes positives telles que pour tout $\beta \geq \beta_0$ et $\eta \in \left]0, \frac{1}{\beta^2}\right]$, $|x|+|t|+|\tau| \leq \frac{1}{\beta^4}$ on a

1. $|a(t,x;\tau,\xi)| \geq C_1\langle\xi\rangle^2$ *si* $|\xi| \geq C_2$;
2. $a(0,0,0,\xi) = 0$ *et* $\forall\tilde{\xi}$ *tq* $|\xi - \tilde{\xi}| < \varepsilon_2 \Rightarrow \frac{1}{i}\left\{\overline{a}(t,x;\tau,\tilde{\xi}); a(t,x;\tau,\tilde{\xi})\right\}$
$\geq \beta C_1\left(\gamma(0)|\psi'_x(0)|^2 - (\psi'_t(0))^2\right)^2$.

Lemme 4.3. *Sous les hypothèses du lemme 4.2, il existe des constantes positives A, C et β_0, telles que, $\forall\beta \geq \beta_0$, $\exists\lambda_0$, tels que $\forall\lambda \geq \lambda_0$, $\forall\eta \in \left]0, \frac{1}{\beta^2}\right]$ et $|t| + |x| + |\tau| \leq \frac{1}{\beta^4}$ on a*

$$\frac{A}{\sqrt{\lambda}}|a(t,x;\tau,\xi)|^2 + \frac{1}{i\lambda}\left\{\overline{a}(t,x;\tau,\xi); a(t,x;\tau,\xi)\right\} \geq \frac{\beta C}{\lambda}\langle\xi\rangle^4. \tag{4.9}$$

Preuve. Raisonnons par l'absurde, si (4.9) n'a pas lieu, il existe des suites A_k, $\beta_{0,k} \longrightarrow \infty$, $C_k \longrightarrow 0$, $\lambda_{0k} = \beta_k^8$ et $0 < \eta_k < \frac{1}{\beta_k^2}$ et on a

$$|a(t_k,x_k;\tau_k,\xi_k)|^2 + \frac{1}{i\sqrt{\lambda_k}A_k}\{\overline{a},a\}(t_k,x_k;\tau_k,\xi_k) < \frac{\beta_k C_k}{\sqrt{\lambda_k}A_k}\langle\xi_k\rangle^4. \tag{4.10}$$

1^er^ cas. On suppose qu'il existe une sous-suite notée aussi ξ_k telle que $|\xi_k| \longrightarrow \infty$, pour k grand d'après le lemme 4.2i), on a

$$A_k C_1\langle\xi_k\rangle^4 \leq A_k|a(t_k,x_k;\tau_k,\xi_k)|^2 \tag{4.11}$$

d'autre part on a

$$\left|\left\{\overline{a}(t_k,x_k;\tau_k,\xi_k); a(t_k,x_k;\tau_k,\xi_k)\right\}\right| \leq \beta_k^4 C\langle\xi_k\rangle^4. \tag{4.12}$$

On déduit de (4.10) que

$$A_k C_1\langle\xi_k\rangle^4 \leq \frac{\beta_k C_k}{\sqrt{\lambda_k}}\langle\xi_k\rangle^4 + \frac{\beta_k^4 C}{\sqrt{\lambda_k}}\langle\xi_k\rangle^4 \tag{4.13}$$

ce qui implique $A_k \leq \frac{C_k}{\beta_k^3} + C$, absurde puisque $\lim A_k = +\infty$.

2^e^ cas. Si $|\xi_k|$ est bornée quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $\xi_k \longrightarrow \xi$. Montrons que $a(0,0;0,\xi) = 0$. En effet on a

$$|\{\overline{a},a\}| \leq \beta_k^4 C\langle\xi_k\rangle^4 \quad \text{alors } \frac{1}{i\sqrt{\lambda_k}A_k}\{\overline{a},a\}(t_k,x_k;\tau_k,\xi_k) \longrightarrow 0, \tag{4.14}$$

et donc $a(0,0;0,\xi) = 0$. D'autre part si on prend k assez grand de sorte que $|\xi_k - \xi| < \varepsilon_2$ alors le lemme 4.2ii) implique

$$\frac{1}{i}\left\{\overline{a}(t_k,x_k;\tau_k,\xi_k); a(t_k,x_k;\tau_k,\xi_k)\right\} \geq \beta_k C_1\left[\gamma(0)|\psi'_x(0)|^2 - |\psi'_t(0)|^2\right]^2 \tag{4.15}$$

et donc (4.10) implique

$$0 \leq C\big(\gamma(0)|\psi_x'(0)|^2 - |\psi_t'(0)|^2\big)^2 \leq C_k\langle\xi_k\rangle^4 \tag{4.16}$$

et donc $\gamma(0)|\psi_x'(0)|^2 - |\psi_t'(0)|^2 = 0$ ce qui est absurde avec le fait que ψ est une surface non caractéristique. Ceci achève la preuve du lemme 4.3. □

Introduisons maintenant une troncature presque analytique.

Notation. Pour $\eta \in \left]0, \frac{1}{\beta^2}\right]$, soit $\tilde\theta_\beta \in C^\infty(\mathbb{C}^2)$ telle que $0 \leq \tilde\theta_\beta \leq 1$ et

$$\tilde\theta_\beta(z,\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| + |\tau| \leq \dfrac{\eta}{1+\eta}\,\dfrac{1}{4\beta^4} \\ 0 & \text{si } |z| + |\tau| \geq \dfrac{\eta}{1+\eta}\,\dfrac{1}{2\beta^4} \end{cases} \tag{4.17}$$

et $|\overline{\partial}\tilde\theta_\beta(z,\tau)| \leq C_N|\tau + (1+\eta)\Im z|^N$ pour toute $N \in \mathbb{N}$. (On dit que $\tilde\theta_\beta$ est presque analytique sur $\Lambda_{(1+\eta)\Phi}$.)

Lemme 4.4. *Il existe des constantes $C > 0$, $\beta_0 > 0$, telles que $\forall\beta \geq \beta_0$, $\exists\lambda_0$ tel que $\forall\lambda \geq \lambda_0$, $\forall\eta \in \left]0, \frac{1}{\beta^2}\right]$, il existe une fonction $\theta \in C_0^\infty$ vérifiant*

$$\theta(t,x;\tau) = \begin{cases} 1 & si\ |t| + |\tau| + |x| \leq \dfrac{1}{4\beta^4} \\ 0 & si\ |t| + |\tau| + |x| \geq \dfrac{1}{\beta^4} \end{cases} \tag{4.18}$$

et pour toute $u \in S(\mathbb{R}^{n+1})$, on a

$$\frac{\beta C}{\lambda}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \leq ||op^w_\lambda(a)u||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} + \frac{C_\beta}{\lambda}\big(op^w_\lambda(r)id_n u, u\big)_{L^2}. \tag{4.19}$$

Remarque 4.3.

1. La fonction θ dépend de η et de β.
2. C ne dépend pas des paramètres η et β.

Preuve. On considère la fonction $\theta_\beta \in C^\infty(\mathbb{C}^2)$, $\theta_\beta = \tilde\theta_\beta|_{\Lambda(1+\eta)\Phi} \circ K_{T_\eta}$ avec K_{T_η} la transformation canonique définie dans (3.6), alors on a

$$\theta_\beta(t,\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| + |\tau| \leq \dfrac{1}{4\beta^4} \\ 0 & \text{si } |t| + |\tau| \geq \dfrac{1}{2\beta^4}. \end{cases} \tag{4.20}$$

Définissons $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq h \leq 1$ de sorte que

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \dfrac{1}{4\beta^4} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \dfrac{1}{2\beta^4}. \end{cases} \tag{4.21}$$

Soit θ la fonction définie par

$$\theta(t,x;\tau)=h(x)\theta_\beta(t,\tau)=\begin{cases}1 & \text{si } |t|+|\tau|+|x|\le \dfrac{1}{4\beta^4}\\ 0 & \text{si } |t|+|\tau|+|x|> \dfrac{1}{\beta^4}.\end{cases}\tag{4.22}$$

On note $A=op^w_\lambda(a)$, et on décompose $A=A_R+iA_I$ où $A_R=\frac{A+A^*}{2}$ et $A_I=\frac{A-A^*}{2i}$ et par définition on a $A_R=op^w_\lambda(\Re a)$, $A_I=op^w_\lambda(\Im a)$ et $A_K^*=A_K$ où $K=R,I$. Pour toute $u\in S(\mathbb{R}^{n+1})$, on a

$$||Au||^2=||A_Ru||^2+||A_Iu||^2+\frac{1}{2}([A^*,A]u,u).\tag{4.23}$$

Nous prétendons que le symbole $\frac{1}{i}\{\overline{a},a\}$ vérifie l'estimation suivante : il existe C_1, C_2, β_0 tels que $\forall\beta\ge\beta_0$, $\exists\lambda_0$ tel que $\forall\lambda\ge\lambda_0$, $\forall\eta\in\left]0,\frac{1}{\beta^2}\right]$, on a

$$\frac{\beta^4C_1}{\lambda}(1-\theta)\langle\xi\rangle^4+\frac{C_1}{\sqrt{\lambda}}|a(t,x;\tau,\xi)|^2+\frac{1}{i\lambda}\{\overline{a},a\}\ge\frac{\beta C_2}{\lambda}\langle\xi\rangle^4.\tag{4.24}$$

En effet, l'estimation (4.24) est triviale si $|t|+|x|+|\tau|\le\frac{1}{\beta^4}$, puisqu'alors $0\le\theta\le 1$ et on peut appliquer le lemme 4.3. Par ailleurs, si $|t|+|x|+|\tau|>\frac{1}{\beta^4}$ alors $\theta\equiv 0$ et comme $\left|\frac{1}{\lambda}\{\overline{a},a\}\right|\le\frac{\beta^4C}{\lambda}\langle\xi\rangle^4$, il suffit de prendre C_1 assez grand, ce qui conduit à (4.24).

Comme prévu on applique l'inégalité de Gårding (voir [RZ]) pour l'opérateur de symbole

$$b(t,x;\tau,\xi)=\frac{\beta^4C_1}{\lambda}(1-\theta)\langle\xi\rangle^4+\frac{C_1}{\sqrt{\lambda}}|a(t,x;\tau,\xi)|^2+\frac{1}{i\lambda}\{\overline{a},a\}$$

et pour la métrique $g=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}\tau^2+\frac{\mathrm{d}\xi^2}{\langle\xi\rangle^2}$. On a donc, d'après (4.24) et $b\in\frac{1}{\sqrt{\lambda}}S(\langle\xi\rangle^4,g)$, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}\frac{C_\beta}{\lambda}\big(op^w_\lambda(1-\theta)\langle\xi\rangle^4u,u\big)\quad&+\quad\frac{C_1}{\sqrt{\lambda}}\big(||A_Ru||^2+||A_Iu||^2\big)+\frac{1}{2}\big([A^*,A]u,u\big)\\&+\quad\frac{C_\beta}{\lambda^{3/2}}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\ge\frac{\beta C}{\lambda}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Pour λ assez grand en fonction de β l'estimation précédente devient alors

$$\frac{\beta C}{\lambda}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\le||op^w_\lambda(a)u||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}+\frac{C_\beta}{\lambda}\Big(op^w_\lambda\big((1-\theta)\langle\xi\rangle^4\big)u,u\Big).\tag{4.26}$$

□

4.2. Inégalité de Carleman pour le système réduit

Dans cette section, nous montrons une inégalité de Carleman pour l'opérateur de symbole $\hat{q}_2$. Pour cela, nous utilisons la forme particulière de $\hat{q}_2$. Introduisons tout d'abord la notation suivante :

$$u=(u_1,\dots,u_n),\quad \tilde{u}=(u_1,\dots,u_{n-2}),\quad M=\begin{pmatrix}id_{n-2}&0&0\\0&\alpha\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

où α est un paramètre réel.

Lemme 4.5. *Il existe des constantes C_1, C_2, α et $\beta_0 > 0$, telles que, $\forall\beta \geq \beta_0$, $\exists\lambda_0$, $\forall\lambda \geq \lambda_0$, $\forall\eta \in \left]0, \frac{1}{\beta^2}\right]$, $\exists\theta$ vérifiant*

$$\theta(t,x;\tau) = \begin{cases} 1 & si\ |t| + |x| + |\tau| \leq \dfrac{1}{4\beta^4} \\ 0 & si\ |t| + |x| + |\tau| > \dfrac{1}{\beta^4} \end{cases} \tag{4.27}$$

et telle que pour tout $u \in S(\mathbb{R}^{n+1})$ à support dans $\left\{(t,x); |x| \leq \frac{1}{\beta}\right\}$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\beta C_2}{\lambda}||Mu||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} &= \frac{\beta C_2}{\lambda}||\tilde{u}||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{\beta C_2}{\lambda}||u_n||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \alpha^2\frac{\beta^2 C_2}{\lambda^2}||u_{n-1}||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \\ &\leq ||Mop^w_\lambda(\hat{q}_2)u||^2_{L^2} + \frac{C_\beta}{\lambda}\Big(Mop^w_\lambda\big((1-\theta)\langle\xi\rangle^4\big)u, Mu\Big). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Remarque 4.4. α doit être plus petit qu'une constante positive ne dépendant que de minorants et majorants de $|\mu|$, $|\nu|$ et $|\mu+\nu|$.

Preuve. La majoration de $\tilde{u}$ et u_n est une simple application du lemme 4.4. Pour l'estimation de u_{n-1}, on pose $a_2 = \chi\big(t - i\frac{\tau}{1+\eta}, \tau\big)(\zeta_0^2 - (\mu+\nu)^t\zeta\zeta)$, on a

$$\begin{aligned} I &= \left|\left|\alpha\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}}op^w_\lambda(a_2)u_{n-1} + \alpha\sqrt{\frac{\beta}{\lambda}}op^w_\lambda\big(-\nu|\zeta|^2\big)\chi\Big(t - i\frac{\tau}{1+\eta},\tau\Big)u_n\right|\right|^2 \\ &\geq \frac{\alpha^2\beta^2}{\lambda^2}C||u_{n-1}||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} - \frac{\alpha^2 C_\beta}{\lambda^2}\Big(op^w_\lambda\big((1-\theta)\langle\xi\rangle^4\big)u_{n-1}, u_{n-1}\Big) - \frac{\alpha^2\beta}{\lambda}\big|\big|op^w_\lambda(-\nu\chi|\zeta|^2)u_n\big|\big|^2. \end{aligned} \tag{4.29}$$

On utilise maintenant le fait que supp$u \subset \left\{(t,x); |x| \leq \frac{1}{\beta}\right\}$, ce qui implique $|\chi\nu|\zeta|^2| \leq C\langle\xi\rangle^2$ sur le support de u avec C une constante ne dépendant pas du paramètre β. $\chi\nu|\zeta|^2 \in S(\langle\xi\rangle^2; g)$ on a alors

$$\Big|\Big|op^w_\lambda\big(-\chi\nu|\zeta|^2\big)u_n\Big|\Big|^2 \leq C||u_n||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{C_\beta}{\lambda}||u_n||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}, \tag{4.30}$$

et par conséquent il découle de (4.29)

$$\begin{aligned} I \geq\ & \frac{\alpha^2\beta^2}{\lambda^2}C||u_{n-1}||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} - \frac{\alpha^2 C_\beta}{\lambda^2}\Big(op^w_\lambda\big((1-\theta)\langle\xi\rangle^4\big)u_{n-1}, u_{n-1}\Big) \\ & - \frac{\alpha^2 C_\beta}{\lambda^2}||u_n||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} - \frac{\alpha^2\beta}{\lambda}C||u_n||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Pour achever la démonstration du lemme 4.5, il suffit donc de prendre α assez petit en fonction de minorants et de majorants $|\mu|$, $|\nu|$ et $|\mu+\nu|$. □

4.3. Inégalité de Carleman pour le système de Lamé

Cette section est consacrée à la démonstration d'une inégalité de Carleman pour q_2 ; cela repose sur un découpage microlocale des zones où la matrice q_2 est soit sous forme de Jordan, soit diagonalisable, soit inversible.

4.3.1. *Préliminaires et notations*

Commençons par traiter le cas où q_2 est semblable à une matrice de Jordan $\hat{q}_2$ *i.e.* près de la zone où les valeurs propres s'annulent simultanément. Or près de chaque point de $\zeta_0^2 - \mu^t\zeta\zeta = 0$ et $\zeta_0^2 - (\mu+\nu)^t\zeta\zeta = 0$ nous sommes près de $\zeta_0 = 0$ et ${}^t\zeta\zeta = 0$ et d'après la section a) i) on a vu qu'il existe une base $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, \zeta, \overline{\zeta})$

dans laquelle q_2 s'écrit sous la forme $\hat{q}_2$, plus précisément si on note $P = \frac{1}{|\zeta|}(\theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \zeta, \overline{\zeta})$ la matrice de passage, on a donc $\hat{q}_2 = P^{-1} q_2 P$ localement.

Un argument élémentaire de compacité de $\{\zeta_0 = 0, {}^t\zeta\zeta = 0 \text{ et } |\zeta| = 1\}$ assure qu'il existe une famille de troncatures χ_j, $j = 1, \dots, N$ et une famille P_j de matrices de passage, telles que χ_j à support dans le domaine de définition de P_j. Ce découpage assure aussi la régularité C^∞ du symbole pseudo-différentiel P_j. Introduisons maintenant quelques troncatures microlocales : soient χ_0 à support près de $(t, x) = (0, 0)$ et loin de $\zeta_0^2 - \mu^t\zeta\zeta = 0$ et $\zeta_0^2 - (\mu+\nu)^t\zeta\zeta = 0$, $\tilde{\chi}(x)$ à support loin de $x = 0$ telle que pour t petit on a $\chi_0 + \tilde{\chi} + \sum_{j=1}^{N} \chi_j = 1$ et de tel sorte que si u à support dans $\{|x| \le \frac{1}{2\beta}\}$ on a $\tilde{\chi} u = 0$. On introduit aussi une troncature χ à support dans $\{|x| < \frac{1}{\beta}\}$, on a $u = \sum_{j=0}^{N} \chi op_\lambda^w(\chi_j) u$. On introduit également,

- $\tilde{\chi}_j = 1$ sur suppχ_j et supporté dans le domaine de définition de P_j ;
- $\hat{\chi}_j = 1$ sur supp$\tilde{\chi}_j$ et supporté dans le domaine de définition de P_j ;
- on note e_j la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Pour ε assez petit on introduit la fonction ψ_ε définie par

$$\psi_\varepsilon(t, x; \tau, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\zeta_0^2 - \mu^t\zeta\zeta| \le \varepsilon|\zeta|^2 \text{ et } |\zeta_0^2 - (\mu+\nu)^t\zeta\zeta| \le \varepsilon|\zeta|^2 \\ 1 & \text{si } |\zeta_0^2 - (\mu+\nu)^t\zeta\zeta| > 2\varepsilon|\zeta|^2 \text{ ou } |\zeta_0^2 - (\mu+\nu)^t\zeta\zeta| > 2\varepsilon|\zeta|^2. \end{cases} \tag{4.32}$$

Pour démontrer la proposition 4.1, on va procéder en deux temps, tout d'abord, on montre la proposition 4.2 puis la proposition 4.3.

Proposition 4.2. *Il existe des constantes C, β_0 et ε_1 tels que pour $\beta \ge \beta_0$ il existe λ_0 et C_β tels que pour tout $\lambda \ge \lambda_0$ on a*

$$\frac{\beta^2 C}{\lambda^2} ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}, H^2_{sc})} \le \left(||op_\lambda^w(q_2)u||^2 + \frac{C_\beta}{\lambda^2} ||op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})u||^2_{L^2(\mathbb{R}, H^2_{sc})} + \frac{C_\beta}{\lambda} ||op_\lambda^w(r) id_n u||^2_{L^2(\mathbb{R}, H^{-2}_{sc})} \right) \tag{4.33}$$

avec $r = (1-\theta)\langle\xi\rangle^4$ (θ définie par la Prop. 4.1).

Proposition 4.3. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\frac{C}{\lambda} ||op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})u||^2_{L^2(\mathbb{R}, H^2_{sc})} \le \frac{C_\beta}{\lambda} ||op_\lambda^w(q_2)u||^2 + \frac{C_\beta}{\lambda^3} ||u||^2_{L^2(\mathbb{R}, H^2_{sc})} + \frac{C_\beta}{\lambda} ||op_\lambda^w(r) id_n u||^2_{L^2(\mathbb{R}, H^{-2}_{sc})}. \tag{4.34}$$

4.3.2. *Lemmes techniques*

Lemme 4.6.

i) *Soit $A = (a_{ij}) \in S(\langle\xi\rangle^m; g)$ où A vérifie $Ae_{n-1} = (a_{n-1,n-1})e_{n-1}$ alors on a pour tout réel s et pour tout $v \in S(\mathbb{R}^{n+1})$*

$$||M op_\lambda^w(A)v||^2_{L^2(\mathbb{R}, H^s_{sc})} \le C ||Mv||^2_{L^2(\mathbb{R}, H^{s+m}_{sc})} \tag{4.35}$$

où C ne dépend que de semi-norme de A mais pas de λ.

ii) *Pour tout $w \in S(\langle\xi\rangle^2; g)$, telle que $w \equiv 0$ sur $\{\zeta_0^2 - \mu^t\zeta\zeta = 0\} \cap \{\zeta_0^2 - (\mu+\nu)^t\zeta\zeta = 0\}$ il existe une constante $C_\beta > 0$ tels que $\forall\varepsilon$, $\exists\varepsilon_1$ telle que l'on ait pour tout $v \in S(\mathbb{R}^{n+1})$*

$$||op_\lambda^w(w)v||^2 \le \varepsilon^2 C_\beta ||v||^2_{L^2(\mathbb{R}, H^2_{sc})} + C_\beta ||op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})v||^2_{L^2(\mathbb{R}, H^2_{sc})} + \frac{C_{\beta,\varepsilon}}{\lambda} ||v||^2_{L^2(\mathbb{R}, H^2_{sc})} \tag{4.36}$$

où ψ_{ε_1} est définie en (4.32).

Preuve. i) C'est une simple vérification laissée au lecteur.
ii) On écrit $v = op^w_\lambda(\psi_{\varepsilon_1})v + op^w_\lambda(1-\psi_{\varepsilon_1})v$ où ε_1 est assez petit. On a donc

$$\begin{aligned} ||op^w_\lambda(w)v||^2 &\leq 2||op^w_\lambda(w)op^w_\lambda(\psi_{\varepsilon_1})v||^2 + 2||op^w_\lambda(w)op^w_\lambda(1-\psi_{\varepsilon_1})v||^2 \\ &\leq C_\beta||op^w_\lambda(\psi_{\varepsilon_1})v||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + 2||op^w_\lambda(w)op^w_\lambda(1-\psi_{\varepsilon_1})v||^2. \end{aligned} \tag{4.37}$$

On a d'une part, $op^w_\lambda(w)op^w_\lambda(1-\psi_{\varepsilon_1}) = op^w_\lambda\big(w(1-\psi_{\varepsilon_1})\big) + \frac{1}{\lambda}op^w_\lambda(r)$, avec r un symbole dans $S(\langle\xi\rangle^2; g)$.

D'autre part on a $w \equiv 0$ sur $\big\{\zeta_0^2 - \mu^t\zeta\zeta = 0\big\} \cap \big\{\zeta_0^2 - (\mu+\nu)^t\zeta\zeta = 0\big\}$ alors par continuité on a pour tout ε petit, $\exists\varepsilon_1$ tel que $|w(1-\psi_{\varepsilon_1})| \leq \varepsilon C_\beta\langle\xi\rangle^2$. On applique alors l'inégalité de Gårding pour la métrique g, et on obtient l'estimation suivante

$$\Big|\Big|op^w_\lambda\big(w(1-\psi_{\varepsilon_1})\big)v\Big|\Big|^2 \leq \varepsilon^2 C_\beta||v||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{C_{\varepsilon,\beta}}{\lambda}||v||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}. \tag{4.38}$$

En reportant dans (4.37) l'estimation (4.38) on trouve (4.36). □

Notre objectif maintenant est d'écrire essentiellement

$$op^w_\lambda(\hat{q}_2) = op^w_\lambda(P^{-1}q_2P) = op^w_\lambda(P^{-1})op^w_\lambda(q_2)op^w_\lambda(P)$$

modulo évidemment des restes du calcul symbolique qui posent déjà un problème à cause de leur caractère matriciel.

D'une façon plus précise, on a sur le support de $\tilde{\chi}_j$, $\hat{q}_2 = P_j^{-1}q_2P_j$, et donc

$$\begin{aligned} op^w_\lambda(\hat{q}_2\chi\tilde{\chi}_j) &= op^w_\lambda(P_j^{-1}q_2P_j\chi\tilde{\chi}_j) \\ &= op^w_\lambda(P_j^{-1}\hat{\chi}_j)op^w_\lambda(q_2)op^w_\lambda(P_j\chi\tilde{\chi}_j) - \frac{1}{\lambda}op^w_\lambda(\ell_1) - \frac{1}{\lambda^2}op^w_\lambda(\ell_0) \end{aligned} \tag{4.39}$$

avec $\ell_j \in S(\langle\xi\rangle^2; g)$ où $j = 0, 1$.

Lemme 4.7. *Il existe des constantes C_1, C_2 et $\beta_0 > 0$ telles que $\forall\beta \geq \beta_0$, $\exists\lambda_0$; $\forall\lambda \geq \lambda_0$ et $\eta \in \big]0, \frac{1}{\beta^2}\big]$ on a*

1. *$\ell_1 e_{n-1} = \gamma(t,x;\tau,\xi)e_{n-1} + W(t,x;\tau,\xi)$ où γ et W sont deux symboles dans $S(\langle\xi\rangle^2; g)$ et W vérifiant $W \equiv 0$ sur $\{\zeta_0^2 - \mu^t\zeta\zeta = 0\} \cap \{\zeta_0^2 - (\mu+\nu)^t\zeta\zeta = 0\}$;*
2. *on a*

$$\begin{aligned} \frac{\beta C_2}{\lambda}||M\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \leq\ & \Big|\Big|Mop^w_\lambda(P_j^{-1}\hat{\chi}_j)op^w_\lambda(q_2)op^w_\lambda(P_j\chi\tilde{\chi}_j)v\Big|\Big|^2 \\ &+\frac{1}{\lambda^2}||Mop^w_\lambda(\ell_1)||^2 + \frac{1}{\lambda^4}||Mop^w_\lambda(\ell_0)v||^2 + \frac{C_\beta}{\lambda^2}||Mv||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \\ &+\frac{C_\beta}{\lambda}\Big(Mop^w_\lambda(r)id_n\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v|M\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v\Big) \end{aligned} \tag{4.40}$$

   avec $r = (1-\theta)\langle\xi\rangle^4$ (θ définie par (4.27)) et $\ell_j \in S(\langle\xi\rangle^2; g)$ où $j = 0, 1$;
3. *on a*

$$||Mop^w_\lambda(\ell_1)v||^2 \leq C_\beta||op^w_\lambda(\psi_{\varepsilon_1})v||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \varepsilon^2C_\beta||v||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{C_{\varepsilon,\beta}}{\lambda}||v||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + C_\beta||Mv||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}. \tag{4.41}$$

Preuve.
1) La preuve de cette partie figure dans l'appendice B.

2) On applique le lemme 4.5 à la fonction $u = \chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v$, il vient

$$\frac{\beta C_2}{\lambda}||M\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_sc)} \le ||Mop^w_\lambda(\hat{q}_2)\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v||^2 + \frac{C_\beta}{\lambda}\Big(Mop^w_\lambda(r)id_n\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v; M\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v\Big) \quad (4.42)$$

et compte tenu du calcul symbolique suivant

$$op^w_\lambda(\hat{q}_2)\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j) = op^w_\lambda(\hat{q}_2\chi\tilde{\chi}_j) + \frac{1}{\lambda}op^w_\lambda(h_1) + \frac{1}{\lambda^2}op^w_\lambda(h_0) \quad (4.43)$$

avec h_1 et h_0 deux symboles dans $S(\langle\xi\rangle^2; g)$. Le point essentiel pour terminer la preuve réside dans la propriété suivante vérifiée par h_1, on a $h_1 = \frac{1}{2i}\big(\{\hat{q}_2\chi, \tilde{\chi}_j\} + \{\hat{q}_2, \chi\}\tilde{\chi}_j\big)$ et donc

$$h_1 = \frac{1}{2i}\Big[(\partial_\xi\hat{q}_2)(\partial_x\chi)\tilde{\chi}_j + \partial_\xi(\hat{q}_2\chi)\partial_x\tilde{\chi}_j - \partial_x(\hat{q}_2\chi)\partial_\xi\tilde{\chi}_j\Big]. \quad (4.44)$$

On vérifie facilement, vu la structure de $\hat{q}_2$, que $h_1 e_{n-1} = \gamma(t,x;\tau,\xi)e_{n-1}$ où γ est un symbole dans $S(\langle\xi\rangle^2; g)$ et donc le lemme 4.6i) implique $||Mop^w_\lambda(h_1)u||^2 \le C_\beta||Mu||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}$ et on précise que C_β ne dépend que de la semi-norme de h_1, mais pas de λ. Ainsi on a

$$\begin{aligned}\frac{\beta C_2}{\lambda}||M\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \le\ & ||Mop^w_\lambda(\hat{q}_2\chi\tilde{\chi}_j)v||^2 + \frac{C_\beta}{\lambda^2}||Mv||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\\ &+\frac{C_\beta}{\lambda}\Big(Mop^w_\lambda(r)id_n\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v; M\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v\Big) \quad (4.45)\end{aligned}$$

et l'inégalité (4.40) découle de (4.45) et de (4.39).

3) On écrit ℓ_1 sous la forme $\ell_1 = \tilde{\ell}_1 + w$ avec $\tilde{\ell}_1 e_{n-1} = \gamma(t,x;\tau,\xi)e_{n-1}$ où $\gamma \in S(\langle\xi\rangle^2; g)$. On applique le lemme 4.6i) à $\tilde{\ell}_1$ et ii) à w, ce qui démontre le lemme 4.7. □

4.3.3. *Preuve de la proposition 4.2*

Lemme 4.8. *Avec les notations utilisées précédemment on a pour tout entier $j \in \{1,\dots,N\}$*

$$\begin{aligned}\frac{\beta C_1}{\lambda}||M\chi op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \le\ & ||Mop^w_\lambda(P_j^{-1}\hat{\chi}_j)op^w_\lambda(q_2)op^w_\lambda(\chi\chi_j)u||^2\\ &+\frac{C_\beta}{\lambda^2}\sum_{k=1}^N||Mop^w_\lambda(P_k^{-1}\chi_k)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{C_\beta}{\lambda^2}||op^w_\lambda(\psi_{\varepsilon_1})u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\\ &+\frac{\varepsilon^2C_\beta}{\lambda^2}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{C_{\beta,\varepsilon_1}}{\lambda^3}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + C_\beta||op^w_\lambda(r)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^{-2}_{sc})}.\end{aligned} \quad (4.46)$$

Preuve. Nous procédons par étapes.

• **1re étape.** En combinant les inégalités (4.41) et (4.40) on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\beta C}{\lambda}||M\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \le\ & ||Mop^w_\lambda(P_j^{-1}\hat{\chi}_j)op^w_\lambda(q_2)op^w_\lambda(P_j\chi\tilde{\chi}_j)v||^2\\ &+\frac{C_\beta}{\lambda^2}||op^w_\lambda(\psi_{\varepsilon_1})v||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{\varepsilon^2C_\beta}{\lambda^2}||v||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{C_{\beta,\varepsilon}}{\lambda^4}||v||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\\ &+\frac{C_\beta}{\lambda^2}||Mv||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{C_\beta}{\lambda}\Big(Mop^w_\lambda(r)id_n\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v|M\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)v\Big). \quad (4.47)\end{aligned}$$

On applique alors l'inégalité précédente à la fonction $v = op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u$, où $u \in S(\mathbb{R}^{n+1})$ et à support dans $\big\{(t,x); |x| < \frac{1}{\beta}\big\}$, de sorte que $\chi u = u$. Il en résulte :

$$\begin{aligned}\frac{\beta C}{\lambda}||M\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)\o(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \quad \leq \quad & \Big|\Big|M op^w_\lambda(P_j^{-1}\hat{\chi}_j)op^w_\lambda(q_2)op^w_\lambda(P_j\chi\tilde{\chi}_j)op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u\Big|\Big|^2 \\ & +\frac{C_\beta}{\lambda^2}||op^w_\lambda(\psi_{\varepsilon_1})u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{\varepsilon^2 C_\beta}{\lambda^2}||op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \\ & +\frac{C_{\varepsilon,\beta}}{\lambda^4}||op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \\ & +\frac{C_\beta}{\lambda^2}||M op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \mathcal{R} \end{aligned} \tag{4.48}$$

avec

$$\mathcal{R} = \frac{C_\beta}{\lambda}\Big(M op^w_\lambda(r)id_n\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u\big|M\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u\Big). \tag{4.49}$$

Par une application classique du calcul symbolique on a $\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j) = \chi op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j) + \frac{1}{\lambda}op^w_\lambda(r_0)$ avec r_0 est un reste dans $S(1,g)$. Par ailleurs la condition sur le support de u implique

$$op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u = op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)\chi u = \chi op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u - \frac{1}{\lambda}op^w_\lambda(r_1)u, \tag{4.50}$$

avec $r_1 \in S(1,g)$ et compte tenu de (4.48) on en déduit

$$\begin{aligned}\frac{\beta C}{\lambda}||M\chi op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \quad \leq \quad & \Big|\Big|M op^w_\lambda(P_j^{-1}\hat{\chi}_j)op^w_\lambda(q_2)op^w_\lambda(P_j\chi\tilde{\chi}_j)op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u\Big|\Big|^2 \\ & +\frac{C_\beta}{\lambda^2}||op^w_\lambda(\psi_{\varepsilon_1})u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{\varepsilon^2 C_\beta}{\lambda^2}||\chi op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \\ & +\frac{C_{\varepsilon,\beta}}{\lambda^4}||\chi op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{C_\beta}{\lambda^2}||M\chi op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \\ & +\frac{C_{\varepsilon,\beta}}{\lambda^3}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \mathcal{R}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

• **2e étape.** Dans cette étape on va estimer $\mathcal{R}$, on a :

$$\mathcal{R} = \frac{C_\beta}{\lambda}\Big(M op^w_\lambda(r)id_n\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)\big|M\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u\Big), \tag{4.52}$$

ce qui implique

$$|\mathcal{R}| \leq \frac{C_\beta}{\lambda}\Big|\Big|op^w_\lambda(\langle\xi\rangle^{-2})M op^w_\lambda(r)id_n\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)\Big|\Big|^2 + \frac{1}{\lambda}\Big|\Big|op^w_\lambda(\langle\xi\rangle^2)M\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u\Big|\Big|^2 \tag{4.53}$$

et donc on a

$$|\mathcal{R}| \leq \frac{C_\beta}{\lambda}||op^w_\lambda(r)id_n u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^{-2}_{sc})} + \frac{C}{\lambda}\Big|\Big|M\chi op^w_\lambda(\tilde{\chi}_j)op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u\Big|\Big|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}. \tag{4.54}$$

où C est une constante ne dépendant pas des paramètres β et λ.

Remarquons d'autre part que, en utilisant la forme de la matrice M, et $\lambda \gg \beta$,

$$||\chi op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \leq \frac{\lambda}{\beta}||M\chi op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}, \tag{4.55}$$

de plus on a

$$\frac{C_\beta}{\lambda^2}||M\chi op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \leq \frac{1}{4}\ \frac{\beta C}{\lambda}||M\chi op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}. \tag{4.56}$$

Ensuite, prenant ε assez petit par rapport à β, de sorte que $\varepsilon \leq \frac{\beta}{4C_\beta}$ et en reportant dans (4.51) les inégalités (4.54, 4.55) et (4.56) on trouve l'estimation suivante pour tout $j = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned}\frac{\beta C_1}{\lambda}||M\chi op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \quad \leq \quad & \left|\left|M op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)op^w_\lambda(q_2)op^w_\lambda(P_j\chi\tilde{\chi}_j)op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)u\right|\right|^2 \\ & + \frac{C_\beta}{\lambda^2}||op^w_\lambda(\psi_{\varepsilon_1})u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{C_{\beta,\varepsilon}}{\lambda^3}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \\ & + \frac{C_\beta}{\lambda}||op^w_\lambda(r)id_n u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^{-2}_{sc})}.\end{aligned} \tag{4.57}$$

• **3$^{\text{e}}$ étape.** Évaluons maintenant, par un calcul symbolique, le symbole

$$\begin{aligned} op^w_\lambda(P_j^{-1}\hat{\chi}_j)op^w_\lambda(q_2)\Big[op^w_\lambda(P_j\chi\tilde{\chi}_j)op^w_\lambda(P_j^{-1}\chi_j)\Big] \quad &= \quad op^w_\lambda(P_j^{-1}\hat{\chi}_j)op^w_\lambda(q_2)\Big[op^w_\lambda(\chi\tilde{\chi}_j) + \frac{1}{\lambda}op^w_\lambda(r_{-1})\Big] \\ &= \quad op^w_\lambda(P_j^{-1}\hat{\chi}_j)op^w_\lambda(q_2)op^w_\lambda(\chi\chi_j) + \frac{1}{\lambda}op^w_\lambda(P_j^{-1}\hat{\chi}_j q_2 r_{-1}) \\ & \quad\ + \frac{1}{\lambda^2}op^w_\lambda(r_0)\end{aligned} \tag{4.58}$$

où r_k, $k = 0, 1$ sont deux symboles dans $S(1, g)$.

D'autre part, on a :

$$op^w_\lambda\big(P_j^{-1}\hat{\chi}_j q_2 r_{-1}\big)u = \sum_{k=0}^{N} op^w_\lambda\big(P_j^{-1}\hat{\chi}_j q_2 r_{-1} P_k\tilde{\chi}_k\big)op^w_\lambda(P_k^{-1}\chi_k)u + \frac{1}{\lambda}op^w_\lambda(r_0')u \tag{4.59}$$

(nous rappelons que $u = \sum\limits_{k=0}^{N} op^w_\lambda(\chi_k)u)$; avec $r_0' \in S(1, g)$.

Remarquons maintenant, par un calcul élémentaire, que pour tout $k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\big[P_j^{-1}\hat{\chi}_j q_2 r_{-1} P_k\tilde{\chi}_k\big]e_{n-1} \quad &= \quad \Big[P_j^{-1}\hat{\chi}_j\big((\zeta_0^2 - \mu^t\zeta\zeta)id_n - \nu\zeta^t\zeta\big)r_{-1}\tilde{\chi}_k P_k\Big]e_{n-1} \\ &= \quad \Big[(\zeta_0^2 - \mu^t\zeta\zeta)P_j^{-1}\hat{\chi}_j r_{-1}P_k\tilde{\chi}_k\Big]e_{n-1} - \Big[\nu\tilde{\chi}_j{}^t\zeta r_{-1}P_k\tilde{\chi}_k e_{n-1}\Big]e_{n-1}.\end{aligned} \tag{4.60}$$

On applique alors le lemme 4.6 à l'opérateur $op^w_\lambda\big(P_j^{-1}\hat{\chi}_j q_2 r_{-1}P_k\tilde{\chi}_k\big)$ et à la fonction $v = op^w_\lambda(P_k^{-1}\chi_k)u$, il vient pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\left|\left|M op^w_\lambda\big(P_j^{-1}\hat{\chi}_j q_2 r_{-1}P_k\tilde{\chi}_k\big)op^w_\lambda(P_k^{-1}\chi_k)u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \quad \leq \quad & C_\beta\left|\left|M op^w_\lambda(P_k^{-1}\chi_k)u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \\ & + C_\beta\big|\big|op^w_\lambda(\psi_{\varepsilon_1})u\big|\big|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \\ & + \varepsilon^2 C_\beta||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \\ & + \frac{C_{\beta,\varepsilon}}{\lambda^2}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}.\end{aligned} \tag{4.61}$$

Par ailleurs, pour $k = 0$ on a

$$\big(P_j^{-1}\hat{\chi}_j q_2 r_{-1}\chi_0\big) \equiv 0 \ \text{ sur } \{\zeta_0^2 - \mu^t\zeta\zeta = 0\} \cap \{\zeta_0^2 - (\mu+\nu)^t\zeta\zeta = 0\}\cdot \tag{4.62}$$

On en déduit d'après le lemme 4.6 que l'estimation (4.61) reste vraie pour $k=0$, d'où on a :

$$\begin{aligned}\Big|\Big|Mop_\lambda^w(P_j^{-1}\hat{\chi}_j)op_\lambda^w(q_2)op_\lambda^w(P_j\chi\tilde{\chi}_j)op_\lambda^w(P_j^{-1}\chi_j)u\Big|\Big|^2 \quad \leq \quad & \Big|\Big|Mop_\lambda^w(P_j^{-1}\hat{\chi}_j)op_\lambda^w(q_2)op_\lambda^w(\chi\chi_j)u\Big|\Big|^2\\ &+\frac{C_\beta}{\lambda^2}\sum_{k=1}^{N}\big|\big|Mop_\lambda^w(P_k^{-1}\chi_k)u\big|\big|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\\ &+\frac{C_\beta}{\lambda^2}\big|\big|op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})u\big|\big|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\\ &+\frac{\varepsilon^2C_\beta}{\lambda^2}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\\ &+\frac{C_{\beta,\varepsilon}}{\lambda^3}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Ce qui achève, compte tenu de (4.57) et (4.63), la démonstration de l'inégalité (4.46). □

Fin de la preuve de la proposition 4.2

Nous commençons par le calcul symbolique suivant :

$$op_\lambda^w(q_2)op_\lambda^w(\chi\chi_j)=op_\lambda^w(\chi\chi_j)op_\lambda^w(q_2)+\frac{1}{\lambda}op_\lambda^w(r_1)+\frac{1}{\lambda^2}op_\lambda^w(r_0) \tag{4.64}$$

avec $r_1, r_0\in S(\langle\xi\rangle^2;g)$ et

$$r_1=\frac{1}{i}\Big\{(\partial_\xi q_2)\partial_x(\chi\chi_j)-\partial_x(q_2)\partial_\xi(\chi\chi_j)\Big\}=\frac{1}{i}\big\{q_2;\chi\chi_j\big\} \tag{4.65}$$

et on a également :

$$op_\lambda^w(P_j^{-1}\hat{\chi}_j)op_\lambda^w(r_1)\chi op_\lambda^w(\chi_k)=op_\lambda^w\big(P_j^{-1}\hat{\chi}_j r_1 P_k\tilde{\chi}_k\big)\chi op_\lambda^w(P_k^{-1}\chi_k) \tag{4.66}$$

modulo $\frac{1}{\lambda}S(\langle\xi\rangle^2;g)$.

Remarquons d'abord que l'on a la propriété

$$(P_j^{-1}r_1P_k)e_{n-1}=\frac{1}{|\zeta|}P_j^{-1}r_1\zeta \ \text{ et } \ (\partial_{\xi_\ell}q_2)\zeta=-(2\mu+\nu)({}^te_\ell\zeta)\zeta+({}^t\zeta\zeta)e_\ell \tag{4.67}$$

et par un calcul élémentaire on a :

$$P_j^{-1}(\partial_{\xi_\ell}q_2)\zeta=\gamma e_{n-1}+\alpha \ \text{ et } \ (\partial_{x_\ell}q_2)\zeta=\gamma' e_{n-1}+\alpha', \tag{4.68}$$

où α,γ,α' et γ' sont des symboles dans $S(\langle\xi\rangle^2;g)$ avec $\alpha=\alpha'=0$ sur $\{\zeta_0^2-\mu^t\zeta\zeta=0\}\cap\{\zeta_0^2-(\mu+\nu)^t\zeta\zeta=0\}$.

D'après le lemme 4.6 on a

$$\begin{aligned}\Big|\Big|Mop_\lambda^w(P_j^{-1}\hat{\chi}_j)op_\lambda^w(r_1)\chi op_\lambda^w(\chi_k)u\Big|\Big|^2 \quad \leq \quad & C_\beta\big|\big|M\chi op_\lambda^w(P_k^{-1}\chi_k)u\big|\big|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}+C_\beta\big|\big|op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})u\big|\big|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\\ &+\varepsilon C_\beta||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}+\frac{C_{\beta,\varepsilon_1}}{\lambda}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}. \end{aligned} \tag{4.69}$$

On déduit du lemme 4.6, après avoir sommer par rapport à j et en sommant (4.69) par rapport à k, que pour λ grand

$$\begin{aligned}
\frac{\beta C}{\lambda}\sum_{j=1}^{N}\left|\left|M\chi op_\lambda^w(P_j^{-1}\chi_j)u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} &\leq \sum_{j=1}^{N}\left|\left|Mop_\lambda^w(P_j^{-1}\chi_j)op_\lambda^w(\chi\chi_j)op_\lambda^w(q_2)u\right|\right|^2\\
&+\frac{C_\beta}{\lambda^2}\left|\left|op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}+\frac{\varepsilon C_\beta}{\lambda^2}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\\
&+\frac{C_{\beta,\varepsilon_1}}{\lambda^3}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}+\frac{C_\beta}{\lambda}||op_\lambda^w(r)id_nu||^2_{L^2(\mathbb{R},H^{-2}_{sc})}\\
&\leq \left(C+\frac{C_\beta}{\lambda}\right)||op_\lambda^w(q_2)u||^2+\frac{C_\beta}{\lambda^2}||op_\lambda^w(\psi_\varepsilon)u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\\
&+\frac{\varepsilon C_\beta}{\lambda^2}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}+\frac{C_{\beta,\varepsilon_1}}{\lambda^3}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\\
&+\frac{C_\beta}{\lambda}||op_\lambda^w(r)id_nu||^2_{L^2(\mathbb{R},H^{-2}_{sc})}.
\end{aligned}\tag{4.70}$$

Il ne nous reste plus qu'à remarquer

$$\begin{aligned}
\frac{\beta^2 C}{\lambda^2}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} &\leq \frac{\beta^2 C}{\lambda^2}\left|\left|\chi op_\lambda^w(P_j^{-1}\chi_j)u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}+\frac{C_{\beta,\varepsilon}}{\lambda^3}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\\
&\leq \frac{\beta C}{\lambda}\left|\left|M\chi op_\lambda^w(P_j^{-1}\chi_j)u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}+\frac{C_{\beta,\varepsilon}}{\lambda^3}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}.
\end{aligned}\tag{4.71}$$

En reportant (4.71) dans (4.70) on obtient la proposition 4.2.

5. Preuve du théorème 2.1

5.1. **Preuve de la proposition 4.3**

Cette partie est consacrée pour l'essentiel à la démonstration de la proposition 4.3. Pour cela, comme nous l'avons déjà indiqué, on va étudier les zones où la matrice q_2 est soit diagonalisable, soit inversible. Commençons par introduire quelques notations : pour ε assez petit on note

$$\begin{aligned}
\Delta_0 : \quad = &\left\{|\zeta_0^2-\mu^t\zeta\zeta|\leq\varepsilon \text{ et } \quad |\zeta_0^2-(\mu+\nu)^t\zeta\zeta|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\\
&\cup\left\{|\zeta_0^2-\mu^t\zeta\zeta|\geq\frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |\zeta_0^2-(\mu+\nu)^t\zeta\zeta|\leq\varepsilon\right\}.
\end{aligned}\tag{5.1}$$

D'après l'étude faite dans la section 4 on a q_2 localement diagonalisable dans la zone Δ_0. On note cette fois $P=\frac{1}{|\zeta|}(\theta'_1,\dots,\theta'_{n-1},\zeta)$ la matrice de passage. On a $D=P^{-1}q_2P$ et P dépend localement d'une manière C^∞ en $(t,x;\tau,\xi)$. Soit (φ_j) une famille finie de troncatures, telles que $\sum\varphi_j=1$ dans la zone Δ_0 et une famille (P_j) de matrices de passage. Bien sûr, on peut choisir φ_j à support dans le domaine de définition de P_j. On introduit également les troncatures

- $\tilde\varphi_j=1$, sur le support de φ_j et supporté dans le domaine de définition de P_j ;
- $\hat\varphi_j=1$, sur le support de $\tilde\varphi_j$ et supporté dans le domaine de définition de P_j.

Revenons maintenant à la preuve de la proposition 4.3.

• **1re étape.** On écrit

$$\begin{aligned} op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1}) &= op_\lambda^w\left(\left(1-\sum\varphi_j\right)\psi_{\varepsilon_1}\right)+\sum op_\lambda^w(\varphi_j\psi_{\varepsilon_1}) \\ &= op_\lambda^w\left(\left(1-\sum\varphi_j\right)\psi_{\varepsilon_1}q_2^{-1}\right)op_\lambda^w(q_2)+\sum op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1}) \end{aligned} \tag{5.2}$$

modulo $\frac{1}{\lambda}S(1,g)$.

q_2 est une matrice inversible sur le support de $\psi_{\varepsilon_1}(1-\sum\varphi_j)$. Comme $(1-\sum\varphi_j)\psi_{\varepsilon_1}q_2^{-1}\in S(\langle\xi\rangle^{-2};g)$ on a

$$\left|\left|op_\lambda^w\left(\left(1-\sum\varphi_j\right)\psi_{\varepsilon_1}q_2^{-1}\right)op_\lambda^w(q_2)u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\leq C_{\beta,\varepsilon_1}||op_\lambda^w(q_2)||^2. \tag{5.3}$$

Nous allons maintenant estimer le second terme de (5.2). On commence par appliquer le lemme 4.4 à la fonction donnée par $op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(P_j^{-1}\tilde\varphi_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})u$. Il en résulte

$$\begin{aligned} &\frac{\beta C}{\lambda}\left|\left|op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(P_j^{-1}\tilde\varphi_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \\ \leq\ &\underbrace{\left|\left|op_\lambda^w(D)op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(P_j^{-1}\tilde\varphi_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})u\right|\right|^2 +\frac{C_\beta}{\lambda}\left(op_\lambda^w(r)id_n op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(P_j^{-1}\tilde\varphi_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})u/op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(P_j^{-1}\tilde\varphi_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})u\right)}_{=\mathcal{R}'} \end{aligned} \tag{5.4}$$

et en remarquant que

$$\begin{aligned} op_\lambda^w(D)op_\lambda^w(\varphi_j) &= op_\lambda^w(P_j^{-1}q_2P_j\varphi_j)\ \text{ modulo }\ \frac{1}{\lambda}S(\langle\xi\rangle^2;g) \\ &= op_\lambda^w(P_j^{-1}\hat\varphi_j)op_\lambda^w(q_2)op_\lambda^w(P_j\varphi_j)\ \text{ modulo }\ \frac{1}{\lambda}S(\langle\xi\rangle^2;g) \end{aligned} \tag{5.5}$$

ce qui conduit à

$$op_\lambda^w(D)op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(P_j^{-1}\tilde\varphi_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})=op_\lambda^w(P_j^{-1}\hat\varphi_j)op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})op_\lambda^w(q_2)\ \text{ modulo }\ \frac{1}{\lambda}S(\langle\xi\rangle^2;g). \tag{5.6}$$

On combine (5.6) et (5.4) et on trouve la majoration

$$\frac{C_\beta}{\lambda^2}\left|\left|op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(P_j^{-1}\tilde\varphi_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}\leq\frac{C_{\varepsilon,\beta}}{\lambda}||op_\lambda^w(q_2)u||^2+\frac{C_{\varepsilon,\beta}}{\lambda^3}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}+\frac{1}{\lambda}|\mathcal{R}'|. \tag{5.7}$$

• **2e étape.** Évaluons maintenant $\mathcal{R}'$. Comme $op_\lambda^w(r)id_n$ est diagonale les commutateurs avec cet opérateur sont dans la classe $\frac{1}{\lambda}S(\langle\xi\rangle^4;g)$ alors on a :

$$op_\lambda^w(r)id_n op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(P_j^{-1}\tilde\varphi_j)=op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(P_j^{-1}\tilde\varphi_j)op_\lambda^w(r)id_n+\frac{1}{\lambda}op_\lambda^w(r_0) \tag{5.8}$$

avec $r_0\in S(\langle\xi\rangle^4;g)$, ce qui implique l'inégalité

$$\frac{1}{\lambda}|\mathcal{R}'|\leq\frac{C_{\beta,\varepsilon_1}}{\lambda}||op_\lambda^w(r)id_nu||^2_{L^2(\mathbb{R},H^{-2}_{sc})}+\frac{C_{\beta,\varepsilon_1}}{\lambda^3}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}. \tag{5.9}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} op_\lambda^w\varphi_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1}) &= op_\lambda^w(\varphi_j\tilde{\varphi}_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1}) \\ &= op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(P_j\hat{\varphi}_j)op_\lambda^w(P_j^{-1}\tilde{\varphi}_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1}) \mod \frac{1}{\lambda}S(1,g) \\ &= \o(P_j\hat{\varphi}_j)op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(P_j^{-1}\tilde{\varphi}_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1}) \mod \frac{1}{\lambda}S(1,g) \end{aligned} \tag{5.10}$$

et donc on a

$$\left|\left|op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} \leq C_{\beta,\varepsilon}\left|\left|op_\lambda^w(\varphi_j)op_\lambda^w(P_j^{-1}\tilde{\varphi}_j)op_\lambda^w(\psi_{\varepsilon_1})u\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})} + \frac{C_{\beta,\varepsilon_1}}{\lambda^2}||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_{sc})}. \tag{5.11}$$

En reportant (5.11) et (5.9) dans (5.7) et en combinant avec (5.3) on tire (4.34). Ce qui achève la démonstration de la proposition 4.3.

5.2. Fin de la preuve du théorème 2.1

Proposition 5.1. *Soit $\tilde{Q}_\lambda$ l'opérateur défini par (3.16). Alors il existe des constantes positives C_1, C_2, λ_0 et ε telles que pour tout $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$,* supp$v \subset \{(t,x); |t|+|x| \leq \varepsilon\}$ *et $\lambda \geq \lambda_0$,*

$$||Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C},H^2_\lambda(\mathbb{R}^n))} \leq C_1\lambda^6||\tilde{Q}_\lambda Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}} + C_2\mathrm{e}^{-\lambda\sigma} \tag{5.12}$$

avec $\sigma > 0$ ne dépendant que de η et ε.

Corollaire 5.1. *Soit $\tilde{P}_\lambda$ l'opérateur défini par (3.13). Alors il existe des constantes positives C_1, C_2, λ_0 et ε telles que pour tout $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ à support dans $\{(t,x); |t|+|x| \leq \varepsilon\}$ et $\lambda \geq \lambda_0$,*

$$||Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C},H^2_\lambda(\mathbb{R}^n))} \leq C_1\lambda^6||\tilde{P}_\lambda Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}} + C_2\mathrm{e}^{-\lambda\sigma}. \tag{5.13}$$

Remarque 5.1. 1) Pour montrer le corollaire 5.1 il suffit d'utiliser la proposition 3.3 et l'inégalité (5.12).

2) De l'inégalité (5.13) on prouve, exactement de la même façon que dans [13], le théorème 2.1.

Preuve de la proposition 5.1. On applique le corollaire 4.1 à la fonction $u = T_\eta^* Tv$. De plus les propositions 3.1 et 3.2 permettent d'écrire

$$||u||^2_{L^2(\mathbb{R},H^2_\lambda)} = ||T_\eta u||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C},H^2_\lambda)} = ||Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C},H^2_\lambda)} \tag{5.14}$$

$$||Q_\lambda u||^2 = \left|\left|T_\eta Q_\lambda T_\eta^* Tv\right|\right|^2_{L^2(1+\eta)\Phi} = ||\tilde{Q}_\lambda Tv||^2_{L^2(1+\eta)\Phi}. \tag{5.15}$$

On déduit de (4.4)

$$||Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C},H^2_\lambda)} \leq C_1\lambda^6||\tilde{Q}_\lambda Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C},H^2_\lambda)} + C_2\lambda^5||Ru||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C},H^2_\lambda)} \tag{5.16}$$

avec $R = op_\lambda^w(1-\theta)$; or d'après la proposition 3.2 on a

$$||Ru||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} = ||T_\eta Ru||^2_{L^2(1+\eta)\Phi} = ||\tilde{R}T_\eta u||^2_{L^2(1+\eta)\Phi} = ||\tilde{R}Tv||^2_{L^2(1+\eta)\Phi} \tag{5.17}$$

or d'après [13] (Prop. 4.6), on a

$$||\tilde{R}Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C},H^2_\lambda)} \le \frac{C_N}{\lambda^N}||Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C},H^2_\lambda)} + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\lambda\sigma}), \quad \forall N \in \mathbb{N} \tag{5.18}$$

ce qui achève la démonstration. □

6. Preuve des théorèmes 2.2 et 2.3

On se propose, dans cette section, de montrer les théorèmes 2.2 et 2.3 ; pour ceci on va montrer qu'il suffit d'obtenir le résultat d'unicité suivant :

Proposition 6.1. *Soit $T > T_0$ et u solution du problème au bord*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_e u = 0 & \textit{dans }]0,T[\times\Omega \\ u|_\Sigma = 0 & \\ \mu\ \frac{\partial u}{\partial n} + (\nu \operatorname{div} u)n = 0 & \textit{sur } \Sigma. \end{cases} \tag{6.1}$$

Alors u vérifie $u(0,x) = \partial_t u(0,x) \equiv 0$ pour tout $x \in \Omega$.

Nous allons voir tout de suite comment cette proposition entraîne le théorème 2.2 et le théorème 2.3. En effet, soit $T > T_0$ et $g \in L^2(\Sigma)$. On peut résoudre le problème d'évolution

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta_e u = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ u|_{t=T} = 0; \quad \partial_t u\big|_{t=T} = 0 & \\ u|_{\mathbb{R}\times\partial\Omega} = g\cdot \mathbf{1}_\Sigma. & \end{cases} \tag{6.2}$$

La solution de ce problème de Cauchy est telle que $\big(u, \frac{\partial u}{\partial t}\big)_{t=0} \in E_{-1}$. On note cette valeur $S(g)$. On a ainsi défini $S : L^2(\Sigma) \longrightarrow E_{-1}$. On note classiquement $F_D = \mathrm{Im}S$, F_D est l'espace vectoriel nommé "espace des états contrôlables". Pour v^0, v^1 deux fonctions régulières on introduit le problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 v - \Delta_e v = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ v|_{t=0} = v^0, \quad \partial_t v\big|_{t=0} = v^1 & \\ v|_\Sigma = 0. & \end{cases} \tag{6.3}$$

Soit v la solution de (6.3) ; en multipliant l'équation (6.2) par v et en intégrant sur $]0,T[\times\Omega$ on obtient par intégration par parties

$$\int_\Omega (v^0u^1 - v^1u^0)\mathrm{d}x - \int_\Sigma \Big(\mu\ \frac{\partial u}{\partial n} + (\nu \operatorname{div} u)n\Big)v + \int_\Sigma \Big(\mu\ \frac{\partial v}{\partial n} + (\nu \operatorname{div} v)n\Big)u = 0, \tag{6.4}$$

et donc

$$\int_\Omega (v^0u^1 - v^1u^0)\mathrm{d}x = \int_\Sigma g\Big(\mu\ \frac{\partial v}{\partial n} + (\nu \operatorname{div} v)n\Big). \tag{6.5}$$

Soit maintenant $(v^0, v^1) \in F^\perp$ on a alors $\mu\ \frac{\partial v}{\partial n} + \nu(\operatorname{div} v)n = 0$ sur Σ, comme v vérifie (6.3) alors v est une solution de (6.1) et d'après la proposition 6.1 on a $v^0 = v^1 = 0$. On en déduit que l'espace des données contrôlables est dense dans l'espace E_{-1}.

De la même façon on prouve le théorème 2.3.

Preuve de la proposition 6.1. Soit $x_0 \in \Gamma$ et $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \cap \partial\Omega\imath\Gamma$. On pose $\widetilde{\Omega} = \Omega \cup B(x_0, r)$. Soit u une solution de (6.1) on a $u \in C(]0, T[; H_0^1(\Omega)^n) \cap C^1(]0, T[; L^2(\Omega)^n)$ et on prolonge u de la façon suivante :

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{dans }]0, T[\times\Omega \\ 0 & \text{dans }]0, T[\times(\widetilde{\Omega} \setminus \Omega). \end{cases} \tag{6.6}$$

La fonction $\tilde{u}(t, x)$ est aussi dans $C(]0, T[; H_0^1(\Omega)^n) \cap C^1(]0, T[; L^2(\Omega)^n)$. D'après les conditions au bord on a :

$$\begin{cases} \partial_t^2\widetilde{u} - \Delta_e\widetilde{u} = 0 & \text{dans }]0, T[\times\widetilde{\Omega} \\ \widetilde{u} \equiv 0 & \text{dans }]0, T[\times(\widetilde{\Omega} \setminus \Omega). \end{cases} \tag{6.7}$$

Par propagation des surfaces non caractéristiques, on montre, comme dans le cas d'un opérateur à coefficients analytiques, que $\tilde{u}\big(\frac{T}{2}, x\big) = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\big(\frac{T}{2}, x\big) \equiv 0$ dans $\widetilde{\Omega}$ (voir par exemple Lions [11], Chap. 1) et donc $\widetilde{u} \equiv 0$ dans $]0, T[\times\widetilde{\Omega}$, ce qui achève la preuve de la proposition 6.1. □

Appendice A

Preuve du lemme 4.2 On utilise les notations de ce lemme.

i) Soit β assez grand tel que $|x| + |t| + |\tau| \le \frac{1}{\beta^4}$ implique $\big|t - i\frac{\tau}{1+\eta}\big| + |\tau| \le \frac{d}{2}$. On a :

$$a(t, x, \tau, \xi) = p\Big(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x, \tau + i\psi_t'\Big(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x\Big); \xi + i\psi_x'\Big(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x\Big)\Big) \tag{A.1}$$

avec $p(t, x; \tau, \xi) = \tau^2 - \gamma(t, x)|\xi|^2$. On écrit

$$\begin{aligned} a(t, x; \tau, \xi) &= \Big[\tau + i\psi_t'\Big(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x\Big)\Big]^2 \\ &\quad -\gamma\Big(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x\Big)^t\Big(\xi + i\psi_x'\Big(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x\Big)\Big) \cdot \Big(\xi + i\psi_x'\Big(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x\Big)\Big) \end{aligned} \tag{A.2}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} |a(t, x; \tau, x)| &\ge C_1|\xi|^2 - C_2\Big|^t\xi\psi_x'\Big(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x\Big)\Big| - \Big|\tau + i\psi_t'\Big(t + i\frac{\eta}{1+\eta}\tau, x\Big)\Big|^2 - C_3 \\ &\ge C_1|\xi|^2 - \frac{C_2'}{\beta}|\xi| - C \ge C|\xi|^2 \end{aligned} \tag{A.3}$$

pour $|\xi|$ assez grand.

ii) Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} a(0, 0; 0, \xi) = 0 &\iff p(0, 0, i\psi_t'(0); \xi + i\psi_x'(0)) = 0 \\ &\iff -(\psi_t'(0))^2 - \gamma(|\xi|^2 - |\psi_x'(0)|^2 + 2i\xi \cdot \psi_x'(0)) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \xi \cdot \psi_x'(0) = 0 \\ |\xi|^2 = |\psi_x'(0)|^2 - \dfrac{1}{\gamma}(\psi_t'(0))^2. \end{cases} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Dans la suite on note $\xi'=(\tau,\xi)$, $\tilde{\xi}'=(\tau,\tilde{\xi})$

$$\begin{aligned} Z &= \Big(t+i\frac{\eta}{1+\eta}\tau,x,\tilde{\xi}'+i\psi'\Big(t+i\frac{\eta}{1+\eta}\tau,x\Big)\Big);\\ \overline{Z} &= \Big(t-i\frac{\eta}{1+\eta}\tau,x,\tilde{\xi}'-i\psi'\Big(t-i\frac{\eta}{1+\eta}\tau,x\Big)\Big). \end{aligned} \tag{A.5}$$

X représente l'ensemble des variables $(t,x;\tau)$. On a

$$\begin{aligned} \big\{\overline{a}(t,x;\tau,\tilde{\xi});a(t,x,\tau;\tilde{\xi})\big\} &= \big\{\overline{p}(\overline{Z}):p(Z)\big\}=\Big[-i\frac{\eta}{1+\eta}\ \frac{\partial\overline{P}}{\partial t}(\overline{Z})+\frac{\partial\overline{P}}{\partial\tau}(\overline{Z})+i\Big(i\frac{\eta}{1+\eta}\Big)\ \frac{\partial\overline{P}}{\partial\tau}(\overline{Z})\psi''_{tt}\\ &\quad +i\Big(i\frac{\eta}{1+\eta}\Big)\psi''_{tx}\ \frac{\partial\overline{P}}{\partial\xi}(\overline{Z})\Big]\cdot\Big[\frac{\partial P}{\partial t}(Z)+i\psi''_{tt}\ \frac{\partial P}{\partial\tau}(Z)+i\psi''_{tx}\ \frac{\partial P}{\partial\xi}(Z)\Big]\\ &\quad +\Big[\frac{\partial P}{\partial x}(Z)+i\psi''_{tx}\ \frac{\partial P}{\partial\tau}(Z)+i\psi''_{xx}\ \frac{\partial P}{\partial\xi}(Z)\Big]\cdot\frac{\partial\overline{P}}{\partial\xi}(\overline{Z})\\ &\quad -\Big[\frac{\partial\overline{P}}{\partial t}(\overline{Z})-i\psi''_{tt}\ \frac{\partial\overline{P}}{\partial\tau}(\overline{Z})-i\psi''_{xt}\cdot\frac{\partial\overline{P}}{\partial\xi}(\overline{Z})\Big]\cdot\Big[i\frac{\eta}{1+\eta}\ \frac{\partial P}{\partial t}(Z)+\frac{\partial P}{\partial\tau}(Z)\\ &\quad +i\Big(i\frac{\eta}{1+\eta}\Big)\psi''_{tt}\ \frac{\partial P}{\partial\tau}(Z)+i\Big(i\frac{\eta}{1+\eta}\Big)\psi''_{tx}\cdot\frac{\partial P}{\partial\xi}(Z)\Big]\\ &\quad -\Big[\frac{\partial\overline{P}}{\partial x}(\overline{Z})-i\psi''_{tx}\ \frac{\partial\overline{P}}{\partial\tau}(\overline{Z})-i\psi''_{xx}\ \frac{\partial\overline{P}}{\partial\xi}(Z)\Big]\cdot\frac{\partial P}{\partial\xi}(Z). \end{aligned} \tag{A.6}$$

On note ainsi $\zeta_0=\tau+i\psi'_t\big(t+i\frac{\eta}{1+\eta}\tau,x\big)$, $\zeta=\tilde{\xi}+i\psi'_x\big(t+i\frac{\eta}{1+\eta}\tau,x\big)$ et $\delta=\frac{\eta}{1+\eta}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i}\ \big\{\overline{a}(t,x;\tau,\tilde{\xi});a(t,x;\tau,\tilde{\xi})\big\} &= \Im\Big[i\delta(\partial_t\gamma)({}^t\overline{\zeta\zeta})+2\overline{\zeta}_0-2\psi''_{tt}\delta\overline{\zeta}_0+2\delta\psi''_{tx}\overline{\zeta}\Big]\cdot\Big[(-\partial_t\gamma)({}^t\zeta\zeta)+2i\psi''_{tt}\zeta_0-2i\gamma\psi''_{tx}\zeta\Big]\\ &\quad +\Im\Big[(-\partial_x\gamma)({}^t\zeta\zeta)+2i\psi''_{tx}\zeta_0-2i\gamma\psi''_{xx}\zeta\Big]\cdot[-2\gamma\overline{\zeta}]. \end{aligned} \tag{A.7}$$

Or par un calcul élémentaire on a

$$\begin{cases} \zeta=\tilde{\xi}+i\varphi'_x(0)+\mathcal{O}(\beta|X|)\\ \zeta_0=i\varphi'_t(0)+\mathcal{O}(\beta|X|) \end{cases} \tag{A.8}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i}\big\{\overline{a}(t,x,\tau,\tilde{\xi});a(t,x;\tau,\tilde{\xi})\big\}=\Im\Big[-2i\psi'_t(0)+2i\delta\psi''_{tt}(0)\psi'_t(0)\\ &+2\delta\gamma\psi''_{tx}(0)\tilde{\xi}-2i\gamma\delta\psi''_{tx}(0)\psi'_x(0)+\mathcal{O}(\delta)+\mathcal{O}(\beta^2(|X|)\Big]\\ &\Big[-2\psi''_{tt}(0)\psi'_t(0)-2i\gamma\psi''_{tx}(0)\tilde{\xi}+2\gamma\psi''_{tx}(0)\psi'_x(0)+\mathcal{O}(\delta)+\mathcal{O}(\beta^2|X|)\Big]\\ &+\Im\Big[-2i\gamma\psi''_{xx}(0)\tilde{\xi}+2\gamma\psi''_{xx}(0)\psi'_x(0)-2\psi''_{tx}(0)\psi'_t(0)+\mathcal{O}(\delta)+\mathcal{O}(\beta^2|X|)\Big]\\ &\cdot\big[2i\gamma\psi'_x(0)-2\gamma\tilde{\xi}+\mathcal{O}(\beta|X|)\big]. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{cases} \psi''_{tt}(0)=\varphi''_{tt}(0)+2\beta(\varphi'_t(0))^2-\frac{2}{\beta}\\ \psi''_{xx}(0)=\varphi''_{xx}(0)+2\beta\varphi'_x(0)^t\varphi'_x(0)-\frac{2}{\beta}id_n\\ \psi''_{tx}(0)=\varphi''_{tx}(0)+2\beta\varphi'_t(0)\varphi'_x(0). \end{cases} \tag{A.10}$$

De plus on a

$$\begin{aligned}\psi''_{tx}(0)\tilde{\xi} &= \varphi''_{tx}(0)\tilde{\xi} + 2\beta\varphi'_t(0)\varphi'_x(0)\tilde{\xi}\\ &= \varphi''_{tx}(0)\tilde{\xi} + 2\beta\varphi'_t(0)\varphi'_x(0)(\tilde{\xi}-\xi)\\ &= \varphi''_{tx}(0)\tilde{\xi} + \mathcal{O}(\varepsilon_2\beta).\end{aligned} \tag{A.11}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i}\big\{\overline{a}(t,x;\tau,\tilde{\xi});a(t,x;\tau,\tilde{\xi})\big\} = -4\delta\big[\psi''_{tt}(0)\psi'_t(0) - \gamma\psi''_{tx}(0)\psi'_x(0)\big]^2\\ &+ 4(\psi'_t(0))\big[\psi''_{tt}(0)\psi'_t(0) - \gamma\psi''_{tx}(0)\psi'_x(0)\big] + 4\gamma^2\psi''_{xx}(0)\psi'_x(0)\psi'_x(0)\\ &- 4\gamma\psi''_{tx}(0)\psi'_x(0)\psi'_t(0) + \mathcal{O}(\delta\beta) + \mathcal{O}(\varepsilon_2\delta\beta^2) + \mathcal{O}(\beta^3|X|) + 0(1),\end{aligned} \tag{A.12}$$

or :

- $\psi''_{tt}(0)\psi'_t(0) - \gamma\psi''_{tx}(0)\psi'_x(0) = -2\beta(\varphi'_t(0))\big(\gamma|\varphi'_x(0)|^2 - (\varphi'_t(0))^2\big) + C_1 + \frac{C_2}{\beta}$
  avec C_1 et C_2 deux constantes
- $\psi''_{xx}(0)\psi'_x(0)\psi'_x(0) = 2\beta|\varphi'_x(0)|^4 + C'_1 + \frac{C'_2}{\beta}$
- $\psi''_{tx}(0)\psi'_x(0)\psi'_t(0) = +2\beta(\varphi'_t(0))^2|\varphi'_x(0)|^2 + C''_1$

et donc on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i}\big\{\overline{a}(t,x,\tau,\tilde{\xi});a(t,x,\tau,\tilde{\xi})\big\} \geq -C\beta^2\delta(\varphi'_t(0))^2\big[((\varphi'_t(0))^2 - \gamma(\varphi'_x(0)|^2)^2\big]\\ &- C\delta\beta\big|\varphi'_t(0)^2 - \gamma|\varphi'_x(0)|^2\big| - 8\beta(\varphi'_t(0))^2\big(\gamma|\varphi'_x(0)|^2 - (\varphi'_t(0))^2\big)\\ &+ 8\gamma^2\beta|\varphi'_x(0)|^4 - 8\gamma\beta(\varphi'_t(0))^2|\varphi'_x(0)|^2 - C_1\delta\beta - C_2\delta\varepsilon_2\beta^2 - C_3\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2i}\big\{\overline{a}(t,x;\tau,\tilde{\xi});a(t,x;\tau,\tilde{\xi})\big\} \geq (8\beta - C\beta^2\delta)\big[\gamma|\varphi'_x(0)|^2 - (\varphi'_t(0))^2\big]^2\\ &- C\delta\beta\big|\varphi'_t(0)^2 - \gamma|\varphi'_x(0)|^2\big| - C_2\varepsilon_2\beta_k - C_3 - C_1\delta\beta.\end{aligned} \tag{A.14}$$

Ainsi pour $\eta \leq \frac{1}{\beta^2}$ et ε_2 assez petit, on a

$$\frac{1}{2i}\{\overline{a},a\} \geq C\beta\big[(\varphi'_t(0))^2 - \gamma|\varphi'_x(0)|^2\big]^2. \tag{A.15}$$

Appendice B

L'objet de cet appendice est de montrer le lemme 4.11 1). Par le calcul symbolique on a (en oubliant les indices),

$$\begin{aligned}\ell_1 &= \frac{1}{2i}\Big[(\partial_\xi P^{-1})(\partial_x q)P\chi\tilde{\chi} - \partial_x P^{-1}(\partial_\xi q)P\chi\tilde{\chi} + (\partial_\xi P^{-1})q(\partial_x P)\chi\tilde{\chi} + (\partial_\xi P^{-1})qP\partial_x(\chi\tilde{\chi})\\ &+ P^{-1}(\partial_\xi q)(\partial_x P)\chi\tilde{\chi} + P^{-1}(\partial_\xi q)P(\partial_x\chi\tilde{\chi}) - (\partial_x P^{-1})q(\partial_\xi P)\chi\tilde{\chi} - (\partial_x P^{-1})qP\partial_\xi(\chi\tilde{\chi})\\ &- P^{-1}(\partial_x q)(\partial_\xi P)\chi\tilde{\chi} - P^{-1}(\partial_x q)P\partial_\xi(\chi\tilde{\chi})\Big] + \frac{1}{2i}\Big[(\partial_\tau P^{-1})(\partial_t q)P\chi\tilde{\chi} - (\partial_t P^{-1})(\partial_\tau q)\chi\tilde{\chi}\\ &+ (\partial_\tau P^{-1})q\partial_t P\chi\tilde{\chi} + (\partial_\tau P^{-1})qP\partial_t(\chi\tilde{\chi}) + P^{-1}(\partial_\tau q)(\partial_t P)\chi\tilde{\chi} + P^{-1}(\partial_\tau q)P\partial_t\chi\tilde{\chi}\\ &- \partial_t P^{-1}q(\partial_\tau P)\chi\tilde{\chi} - (\partial_t P^{-1})qP\partial_\tau(\chi\tilde{\chi}) - P^{-1}(\partial_t q)(\partial_\tau P)\chi\tilde{\chi} - P^{-1}(\partial_t q)P\partial_\tau(\chi\tilde{\chi})\Big]\\ &= \frac{1}{2i}\big[(1)+\ldots+(10)\big] + \frac{1}{2i}\big[(1)'+\ldots+(10)'\big].\end{aligned} \tag{B.1}$$

Faisons tout d'abord les remarques techniques : rappelons que $q = (\zeta_0^2 - \mu^t\zeta\zeta)id - \nu\zeta^t\zeta$.

- $Pe_{n-1} = \frac{\zeta}{|\zeta|}$, $q\zeta = (\zeta_0^2 - (\mu+\nu)^t\zeta\zeta)\zeta$, $(\partial_{\xi_j}P)e_{n-1} = \big(\frac{e_j}{|\zeta|} + \zeta\partial_{\xi_j}\big(\frac{1}{|\zeta|}\big)\big)$
- $\partial_{\xi_j}(P^{-1}) = -P^{-1}\partial_{\xi_j}PP^{-1}$
- $(\partial_{x_j}P)e_{n-1} = \frac{i\psi_j''}{|\zeta|} + [\ ]e_{n-1}$
- $\partial_{x_j}(P^{-1})\frac{\zeta}{|\zeta|} = -P\big(\frac{i\psi_j''}{|\zeta|}\big) + [\ ]e_{n-1}$
- $(\partial_{\xi_j}P^{-1})\frac{\zeta}{|\zeta|} = -P^{-1}(\partial_{\xi_j}P)e_{n-1} = -P^{-1}\Big(\frac{e_j}{|\zeta|} + \zeta\partial_{\xi_j}\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big) = -P^{-1}\frac{e_j}{|\zeta|} + [\ ]e_{n-1}$.

• **Calcul de (1) :** $(1) = (\partial_\xi P^{-1})(\partial_x q)P\chi\tilde{\chi}$, donc

$$\begin{aligned}
&(\partial_{\xi_j}P^{-1})(\partial_{x_j}q)Pe_{n-1} = (\partial_{\xi_j}P^{-1})\Big[(2i\zeta_0\psi_{tj}'' - 2i\mu^t\zeta\psi_j'')id - i\nu(\zeta^t\psi_j'' + \psi_j''{}^t\zeta)\\
&- (\partial_{x_j}\mu)^t\zeta\zeta id - (\partial_{x_j}\nu)\zeta^t\zeta\Big]\cdot\frac{\zeta}{|\zeta|}\\
&= \Big[2i\zeta_0\psi_{tj}'' - 2i\mu^t\zeta\psi_j'' - (\partial_{x_j}\mu + \partial_{x_j}\nu)^t\zeta\zeta - i\nu^t\zeta\psi_j''\Big](\partial_{\xi_j}P^{-1})\frac{\zeta}{|\zeta|} - i\nu\frac{^t\zeta\zeta}{|\zeta|}(\partial_{\xi_j}P^{-1})\psi_j''\\
&= i(2\mu+\nu)(^t\zeta\psi_j'')P^{-1}\frac{e_j}{|\zeta|}\ \text{ modulo les termes du lemme.}
\end{aligned}\tag{B.2}$$

• **Calcul de (2) :** $(2) = -(\partial_x P^{-1})(\partial_\xi q)P\chi\tilde{\chi}$, donc

$$\begin{aligned}
-(\partial_{x_j}P^{-1})(\partial_{\xi_j}q)Pe_{n-1} &= -(\partial_{x_j}P^{-1})\big(-2\mu(^t\zeta e_j)id - \nu(e_j{}^t\zeta + \zeta^t e_j)\big)\frac{\zeta}{|\zeta|}\\
&= (2\mu+\nu)(^t\zeta e_j)(\partial_{x_j}P^{-1})\frac{\zeta}{|\zeta|} + \nu(^t\zeta\zeta)(\partial_{x_j}P^{-1})\frac{\zeta}{|\zeta|}\\
&= -i(2\mu+\nu)\Big(\frac{^t\zeta e_j}{|\zeta|}\Big)P^{-1}\psi_j''\ \text{ modulo les termes du lemme.}
\end{aligned}$$

• **Calcul de (3) :** $(3) = (\partial_\xi P^{-1})q(\partial_x P)\chi\tilde{\chi}$

$$\begin{aligned}
&(\partial_{\xi_j}P^{-1})q(\partial_{x_j}P)e_{n-1}\\
&= (\partial_{\xi_j}P^{-1})q\Big(i\frac{\psi_j''}{|\zeta|} + \zeta\partial_{x_j}\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big)\\
&\quad = (\partial_{\xi_j}P^{-1})q\Big(i\frac{\psi_j''}{|\zeta|}\Big)\ \text{ modulo les termes du lemme}\\
&= (\partial_{\xi_j}P^{-1})\Big((\zeta_0^2 - \mu^t\zeta\zeta)i\frac{\psi_j''}{|\zeta|} - i\nu(^t\zeta\psi_j'')\frac{\zeta}{|\zeta|}\Big)\ \text{ modulo les termes du lemme}\\
&= -i\nu(^t\zeta\psi_j'')(\partial_{\xi_j}P^{-1})\frac{\zeta}{|\zeta|}\ \text{ modulo les termes du lemme}\\
&= i\nu\Big(\frac{^t\zeta\psi_j''}{|\zeta|}\Big)P^{-1}e_j\ \text{ modulo les termes du lemme.}
\end{aligned}$$

• **Calcul de (4) :** $(4) = (\partial_\xi P^{-1})qP(\partial_x\chi\tilde{\chi})$, alors

$$\begin{aligned}
(\partial_{\xi_j}P^{-1})qPe_{n-1} &= (\partial_{\xi_j}P^{-1})q\frac{\zeta}{|\zeta|} \qquad \text{alors}\\
&= \frac{\zeta_0^2 - (\mu+\nu)^t\zeta\zeta}{|\zeta|}(\partial_{\xi_j}P^{-1})\zeta,\\
&= 0 \qquad\qquad \text{modulo les termes du lemme.}
\end{aligned}$$

• **Calcul de (5) :** $(5) = P^{-1}(\partial_\xi q)(\partial_x P)\chi\tilde{\chi}$

$$\begin{aligned}
P^{-1}(\partial_{\xi_j} q)(\partial_{x_j} P)e_{n-1} &= P^{-1}(\partial_{\xi_j} q)\Big(i\frac{\psi_j''}{|\zeta|} + \zeta\partial_{x_j}\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big), \quad \text{donc} \\
&= P^{-1}\big(-2\mu({}^t\zeta e_j)id - \nu(\zeta{}^t e_j + e_j{}^t\zeta)\big)\Big(i\frac{\psi_j''}{|\zeta|} + \zeta\partial_{x_j}\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big) \\
&= -i(2\mu)\frac{{}^t\zeta e_j}{|\zeta|}P^{-1}\psi_j'' - i\nu\frac{{}^t\zeta\psi_j''}{|\zeta|}P^{-1}e_j \ \text{ modulo les termes du lemme.}
\end{aligned}$$

• **Calcul de (6) :** $(6) = P^{-1}(\partial_\xi q)P\partial_x(\chi\tilde{\chi})$

$$\begin{aligned}
P^{-1}(\partial_{\xi_j} q)Pe_{n-1} &= P^{-1}\big(-2\mu({}^t\zeta e_j)id - \nu(\zeta{}^t e_j + e_j{}^t\zeta)\big)\frac{\zeta}{|\zeta|} \\
&= -\nu\frac{{}^t\zeta\zeta}{|\zeta|}P^{-1}e_j + [\ ]e_{n-1}, \ \text{ et donc} \\
&= 0 \qquad \text{modulo les termes du lemme.}
\end{aligned}$$

• **Calcul de (7) :** $(7) = -(\partial_x P^{-1})q(\partial_\xi P)\chi\tilde{\chi}$

$$\begin{aligned}
&-(\partial_{x_j} P^{-1})q(\partial_{\xi_j} P)e_{n-1} \\
&= -(\partial_{x_j} P^{-1})q\Big(\frac{e_j}{|\zeta|} + \zeta\partial_{\xi_j}\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big) \\
&= -(\partial_{x_j} P^{-1})\Big((\zeta_0^2 - \mu{}^t\zeta\zeta)\frac{e_j}{|\zeta|} - \nu({}^t\zeta e_j)\frac{\zeta}{|\zeta|}\Big) \ \text{ modulo les termes du lemme} \\
&= -\nu({}^t\zeta e_j)P^{-1}\Big(i\frac{\psi_j''}{|\zeta|} + \zeta\partial_{x_j}\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big) \ \text{ modulo les termes du lemme} \\
&= -i\nu\frac{({}^t\zeta e_j)}{|\zeta|}P^{-1}\psi_j'' \ \text{ modulo les termes du lemme.}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

• **Calcul de (8) :** $(8) = -(\partial_x P^{-1})qP\partial_\xi(\chi\tilde{\chi})$

$$\begin{aligned}
-(\partial_{x_j} P^-1)qPe_{n-1} &= -(\partial_{x_j} P^{-1})q\frac{\zeta}{|\zeta|} \\
&= -\frac{\zeta_0^2 - (\mu+\nu){}^t\zeta\zeta}{|\zeta|}(\partial_{x_j} P^{-1})\zeta \\
&= 0 \text{ modulo les termes du lemme.}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

• **Calcul de (9) :** $(9) = -P^{-1}(\partial_x q)(\partial_\xi P)\chi\tilde{\chi}$

$$\begin{aligned}
&-P^{-1}(\partial_{x_j} q)(\partial_{\xi_j} P)e_{n-1} \\
&= -P^{-1}(\partial_{x_j} q)\Big(\frac{e_j}{|\zeta|} + \zeta\partial_{\xi_j}\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big) \\
&= -P^{-1}\Big[(2i\zeta_0\psi_{tj}'' - 2i\mu{}^t\zeta\psi_j'')id - i\nu(\zeta{}^t\psi_j'' + \psi_j''{}^t\zeta)\Big]\Big(\frac{e_j}{|\zeta|} + \zeta\partial_{\xi_j}\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big) \\
&= 2i\mu\frac{({}^t\zeta\psi_j'')}{|\zeta|}P^{-1}e_j + i\nu\frac{({}^t\zeta e_j)}{|\zeta|}P^{-1}\psi_j'' \quad \text{modulo les termes du lemme.}
\end{aligned}$$

• **Calcul de (10) :** $(10) = -P^{-1}(\partial_x q)P\partial_\xi(\chi\tilde{\chi})$

$$\begin{aligned}
-P^{-1}(\partial_{x_j}q)Pe_{n-1} &= -P^{-1}(\partial_{x_j}q)\frac{\zeta}{|\zeta|}\\
&= -i\nu\frac{({}^t\zeta\zeta)}{|\zeta|}P^{-1}\psi''_j + [\ ]e_{n-1}\\
&= 0 \qquad \text{modulo les termes du lemme.}
\end{aligned}$$

Pour conclure, il ne nous reste plus qu'à remarquer que, modulo les termes du lemme, on a

$$\begin{aligned}
[(1)+\ldots+(10)]_j &= i(2\mu+\nu)\frac{({}^t\zeta\psi''_j)}{|\zeta|}P^{-1}e_j - i(2\mu+\nu)\frac{({}^t\zeta e_j)}{|\zeta|}P^{-1}\psi''_j\\
&\quad + i\nu\frac{{}^t\zeta\psi''_j}{|\zeta|}P^{-1}e_j - i(2\mu)\frac{{}^t\zeta e_j}{|\zeta|}P^{-1}\psi''_j - i\nu\frac{{}^t\zeta e_j}{|\zeta|}P^{-1}\psi''_j\\
&\quad + 2i\mu\frac{{}^t\zeta\psi''_j}{|\zeta|}P^{-1}e_j + i\nu\frac{({}^t\zeta e_j)}{|\zeta|}P^{-1}\psi''_j
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
[(1)+\ldots+(10)]_j &= \Big[i(2\mu+\nu)({}^t\zeta\psi''_j) + 2i\mu({}^t\zeta\psi''_j)\Big]P^{-1}\frac{e_j}{|\zeta|}\\
&\quad -\Big[i(2\mu+\nu)({}^t\zeta e_j) + i(2\mu){}^t\zeta e_j\Big]P^{-1}\frac{\psi''_j}{|\zeta|}\\
&= i(4\mu+\nu)\frac{1}{|\zeta|}P^{-1}\big(({}^t\zeta\psi''_j)e_j - ({}^t\zeta e_j)\psi''_j\big)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\sum_j[(1)+\ldots+(10)]_j &= i(4\mu+\nu)\frac{1}{|\zeta|}P^{-1}\Big(\sum_j({}^t\zeta\psi''_j)e_j - ({}^t\zeta e_j)\psi''_j\Big)\\
&= i(4\mu+\nu)\frac{1}{|\zeta|}P^{-1}\Big(\sum_j\sum_k({}^t\zeta e_k)({}^t\psi''_j e_k)e_j - ({}^t\zeta e_j)({}^t\psi''_j e_k)e_k\Big).
\end{aligned}$$

Comme ψ'' est une matrice symétrique, alors $\psi''_j e_k = \psi''_k e_j$, ce qui implique $\sum_j [(1)+\ldots+(10)]_j \equiv 0$ modulo les termes du lemme.

De la même façon, on introduit le calcul suivant :

- $(\partial_t P)e_{n-1} = \big(i\frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} + \zeta\partial_t\big(\frac{1}{|\zeta|}\big)\big)$
- $(\partial_\tau P)e_{n-1} = \big(-\frac{\eta}{1+\eta}\ \frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} + \zeta\partial_\tau\big(\frac{1}{|\zeta|}\big)\big)$
- $(\partial_t P^{-1})\frac{\zeta}{|\zeta|} = -iP^{-1}\ \frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} + [\ ]e_{n-1}$
- $(\partial_\tau P^{-1})\frac{\zeta}{|\zeta|} = -P^{-1}(\partial_\tau P)P^{-1}\frac{\zeta}{|\zeta|} = -P^{-1}\big(-\frac{\eta}{1+\eta}\ \frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} + \zeta\partial_\tau\big(\frac{1}{|\zeta|}\big)\big)$
  $= \frac{\eta}{1+\eta}P^{-1}\ \frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} + [\ ]e_{n-1}.$

• **Calcul de (1)' :** $(1)' = (\partial_\tau P^{-1})(\partial_t q)P\chi\tilde{\chi}$

$$\begin{aligned}
&(\partial_\tau P^{-1})(\partial_t q)Pe_{n-1} \\
&= (\partial_\tau P^{-1})\Big[\big(2i\zeta_0\psi''_{tx} - 2i\mu^t\zeta\psi''_{tx} - (\partial_t\mu)^t\zeta\zeta\big)id \\
&- (\partial_t\nu)\zeta^t\zeta - i\nu\big(\zeta^t\psi''_{tx} + \psi''_{tx}{}^t\zeta\big)\Big]\frac{\zeta}{|\zeta|} \\
&= -i(2\mu+\nu)({}^t\psi''_{tx}\zeta)(\partial_\tau P^{-1})\frac{\zeta}{|\zeta|} \qquad \text{modulo les termes du lemme} \\
&= -i(2\mu+\nu)\frac{\eta}{1+\eta}\,\frac{({}^t\psi''_{tx}\zeta)}{|\zeta|}P^{-1}\psi''_{tx} \ \text{ modulo les termes du lemme.}
\end{aligned}$$

• **Calcul de (2)' :** $(2)' = -(\partial_t P^{-1})(\partial_\tau q)P\chi\tilde{\chi}$

$$\begin{aligned}
&-(\partial_t P^{-1})(\partial_\tau q)Pe_{n-1} \\
&= -(\partial_t P^{-1})\Big[\frac{\eta}{1+\eta}\Big\{\big(-2\zeta_0\psi''_{tx} + 2\mu^t\zeta\psi''_{tx} - i(\partial_t\mu)^t\zeta\zeta\big)id \\
&\quad -i(\partial_t\nu)\zeta^t\zeta + \nu(\zeta^t\psi''_{tx} + \psi''_{tx}{}^t\zeta)\Big\}\Big]\frac{\zeta}{|\zeta|} \\
&= i(2\mu+\nu)\frac{\eta}{1+\eta}\frac{({}^t\psi''_{tx}\zeta)}{|\zeta|}P^{-1}\psi''_{tx} \ \text{ modulo les termes du lemme.}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

• **Calcul de (3)' :** $(3)' = (\partial_\tau P^{-1})q(\partial_t P)\chi\tilde{\chi}$

$$\begin{aligned}
&(\partial_\tau P^{-1})q(\partial_t P)e_{n-1} \\
&= (\partial_\tau P^{-1})q\Big(i\frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} + \zeta\partial_t\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big) \\
&= (\partial_\tau P^{-1})\Big[(\zeta_0^2 - \mu^t\zeta\zeta)i\frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} - i\nu\frac{{}^t\zeta\psi''_{tx}}{|\zeta|}\zeta\Big] \ \text{ modulo les termes du lemme} \\
&= -i\nu\frac{\eta}{1+\eta}\frac{({}^t\zeta\psi''_{tx})}{|\zeta|}P^{-1}\psi''_{tx} \qquad \text{modulo les termes du lemme.}
\end{aligned}$$

• **Calcul de (4)' :** $(4)' = (\partial_\tau P^{-1})qP\partial_t(\chi\tilde{\chi})$

$$\begin{aligned}
(\partial_\tau P^{-1})qPe_{n-1} &= (\partial_\tau P^{-1})(\zeta_0^2 - (\mu+\nu)^t\zeta\zeta)\frac{\zeta}{|\zeta|} \\
&= 0 \qquad \text{modulo les termes du lemme.}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

• **Calcul de (5)' :** $(5)' = P^{-1}(\partial_\tau q)(\partial_t P)$

$$\begin{aligned}
&P^{-1}(\partial_\tau q)(\partial_t P)e_{n-1} \\
&= P^{-1}(\partial_\tau q)\Big(i\frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} + \zeta\partial_t\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big) \\
&= \frac{\eta}{1+\eta}P^{-1}\Big[\big(-2\zeta_0\psi''_{tt} + 2\mu({}^t\zeta\psi''_{tx}) - i(\partial_t\mu)^t\zeta\zeta\big)id - i(\partial_t\nu)\zeta^t\zeta \\
&\quad + \nu(\zeta^t\psi''_{tx} + \psi''_{tx}{}^t\zeta)\Big]\Big[i\frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} + \zeta\partial_t\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big] \\
&= i(2\mu+\nu)\frac{\eta}{1+\eta}({}^t\zeta\psi''_{tx})P^{-1}\frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} \ \text{ modulo les termes du lemme.}
\end{aligned}$$

• **Calcul de (6)' :** $(6)' = P^{-1}(\partial_\tau q)P\partial_t(\chi\tilde{\chi})$

$$\begin{aligned} P^{-1}(\partial_\tau q)Pe_{n-1} &= P^{-1}(\partial_\tau q)\zeta \\ &= \frac{\eta}{1+\eta}\nu({}^t\zeta\zeta)P^{-1}\psi''_{tx} \\ &= 0 \qquad \text{modulo les termes du lemme.} \end{aligned} \tag{B.7}$$

• **Calcul de (7)' :** $(7)' = -(\partial_t P^{-1})q(\partial_\tau P)\chi\tilde{\chi}$

$$\begin{aligned} &-(\partial_t P^{-1})q(\partial_\tau P)e_{n-1} \\ &= -(\partial_t P^{-1})q\Big(-\frac{\eta}{1+\eta}\frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} + \zeta\partial_\tau\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big) \\ &= \frac{\eta}{1+\eta}(\partial_t P^{-1})q\Big(\frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|}\Big) \qquad \text{modulo les termes du lemme} \\ &= \frac{\eta}{1+\eta}(\partial_t P^{-1})\Big((\zeta_0^2 - \mu{}^t\zeta\zeta)\frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} - \nu({}^t\zeta\psi''_{tx})\frac{\zeta}{|\zeta|}\Big) \quad \text{modulo les termes du lemme} \\ &= i\nu\frac{\eta}{1+\eta}({}^t\zeta\psi''_{tx})P^{-1}\frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} \qquad \text{modulo les termes du lemme.} \end{aligned}$$

• **Calcul de (8)' :** $(8)' = -(\partial_t P^{-1})qP\partial_\tau\chi\tilde{\chi}$

$$\begin{aligned} -(\partial_t P^{-1})qPe_{n-1} &= -(\partial_t P^{-1})q\frac{\zeta}{|\zeta|} \\ &= 0 \qquad \text{modulo les termes du lemme.} \end{aligned}$$

• **Calcul de (9)' :** $(9)' = -P^{-1}(\partial_t q)(\partial_\tau P)\chi\tilde{\chi}$

$$\begin{aligned} &-P^{-1}(\partial_t q)\partial_\tau Pe_{n-1} \\ &= -P^{-1}(\partial_t q)\Big(-\frac{\eta}{1+\eta}\frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} + \zeta\partial_t\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big) \\ &= -P^{-1}\Big[\big(2i\zeta_0\psi''_{tt} - 2i\mu{}^t\zeta\psi''_{tx} - (\partial_t\mu){}^t\zeta\zeta\big)id - (\partial_t\nu)\zeta{}^t\zeta \\ &\quad - i\nu(\zeta{}^t\psi''_{tx} + \psi''_{tx}{}^t\zeta)\Big]\Big(-\frac{\eta}{1+\eta}\frac{\psi''_{tx}}{|\zeta|} + \zeta\partial_t\Big(\frac{1}{|\zeta|}\Big)\Big) \\ &= -i(2\mu+\nu)\frac{\eta}{1+\eta}({}^t\zeta\psi''_{tx})P^{-1}\psi''_{tx} \quad \text{modulo les termes du lemme.} \end{aligned}$$

• **Calcul de (10)' :** $(10)' = -P^{-1}(\partial_t q)P\partial_\tau(\chi\tilde{\chi})$

$$\begin{aligned} -P^{-1}(\partial_t q)Pe_{n-1} &= -P^{-1}(\partial_t q)\frac{\zeta}{|\zeta|} \\ &= i\nu\frac{{}^t\zeta\zeta}{|\zeta|}P^{-1}\psi''_{tx} + [\ ]e_{n-1} \\ &= 0 \qquad \text{modulo les termes du lemme.} \end{aligned}$$

On trouve finalement :

$$(1)' + (2)' + (3)' + (7)' + (9)' + (5)' = 0$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Le Professeur Luc Robbiano a joué un rôle essentiel aussi bien dans la conception que dans la réalisation de ce travail. Je tiens à lui exprimer ma vive gratitude pour sa patience, sa disponibilité et ses nombreuses lectures du manuscrit. L'auteur remercie aussi les rapporteurs pour leurs précieuses remarques.

Références

[1] S. Alinhac, Non unicité du problème de Cauchy. *Ann. Math.* **117** (1983) 77-108.

[2] S. Alinhac et M.S. Baouendi, A non uniqueness result for operators of principal type. *Math. Z.* **220** (1995) 561-568.

[3] D. Ang, M. Ikehata, D. Trong et M. Yamampto, Unique continuation for a stationary isotropic Lamé system with variable coefficients. *Comm. Partial Differential Equations* **23** (1998) 371-385.

[4] B. Dehman et L. Robbiano, La propriété du prolongement unique pour un système elliptique. Le système de Lamé. *J. Math. Pures Appl.* **72** (1993) 475-492.

[5] M. Eller, V. Isakov, G. Nakamura et D. Tataru, *Uniqueness and Stability in the Cauchy Problem for Maxwell' and elasticity systems.* Preprint.

[6] L. Hörmander, *On the uniqueness of the Cauchy problem under partial analy-ticity assumptions.* Preprint (1996).

[7] L. Hörmander, *Linear partial differential operators.* Springer Verlag, Berlin (1963).

[8] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators, I-III.* Springer Verlag.

[9] V. Isakov, A non hyperbolic Cauchy problem for $\Box_a \cdot \Box_b$ and its applications to elasticity theory. *Comm. Pure Math. Appl.* **39** (1986) 747-767.

[10] N. Lerner, Unicité de Cauchy pour des opérateurs faiblement principalement normaux. *J. Math. Pures Appl.* **64** (1985) 1-11.

[11] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués.* Masson, Collection RMA, Paris (1988).

[12] L. Robbiano, Théorème d'unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques. *Comm. Partial Differential Equations* **16** (1991) 789-800.

[13] L. Robbiano et C. Zuily, Uniqueness in the Cauchy problem for operators with partially holomorphic coefficients. *Invent. Math.* **131** (1998) 493-539.

[14] J. Sjöstrand, Singularités analytiques microlocales. *Astérisque* **95** (1982).

[15] D. Tataru, Unique continuation for solutions to P.D.E's between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem. *Comm. on P.D.E.* **20** (1995) 855-884.

[16] C. Zuily, Lectures on uniqueness and non uniqueness in the Cauchy probem. Birkhäuser, *Progress in Math.* **33** (1983).