

## STABILISATION D'UNE POUTRE. ÉTUDE DU TAUX OPTIMAL DE DÉCROISSANCE DE L'ÉNERGIE ÉLASTIQUE

FRANCIS CONRAD<sup>1</sup> ET FATIMA-ZAHRA SAOURI<sup>1</sup>

**Abstract.** We study the stability of a flexible beam clamped at one end. A mass is attached at the other end, where a control moment is applied. The boundary control is proportional to the angular velocity at the end. By spectral analysis, we prove that the optimal decay rate of the energy is given by the spectrum of the generator of the semigroup associated to the system.

**Résumé.** On se propose d'étudier la stabilité d'une poutre flexible homogène, encadrée à une extrémité. À l'autre extrémité est attachée une masse ponctuelle où on applique un moment proportionnel à la vitesse de déplacement angulaire. On montre par une analyse spectrale que le taux optimal de décroissance de l'énergie est déterminé par l'abscisse spectrale du générateur infinitésimal du semi-groupe associé au problème.

**Classification Mathématique.** 35L35, 35P20, 93D15.

Reçu le 17 décembre 1999. Révisé le 25 avril 2002.

### 1. INTRODUCTION

On considère une poutre de type Euler–Bernoulli encadrée à une extrémité. À l'autre extrémité est attachée une antenne de masse  $m$  et de moment d'inertie  $J$  dans le cas général. On obtient ce que l'on appelle un modèle SCOLE, qui a déjà fait l'objet de nombreuses études, en particulier dans [12].

L'évolution des déformations de la poutre dynamique est gouvernée par un système hybride composé d'une équation aux dérivées partielles et de deux équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < 1 & t \geq 0, \\ mu_{tt}(1, t) - u_{xxx}(1, t) = L_1(u, u_t) & & t \geq 0, \\ Ju_{xtt}(1, t) + u_{xx}(1, t) = L_2(u, u_t) & & t \geq 0, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 & & t \geq 0, \end{cases}$$

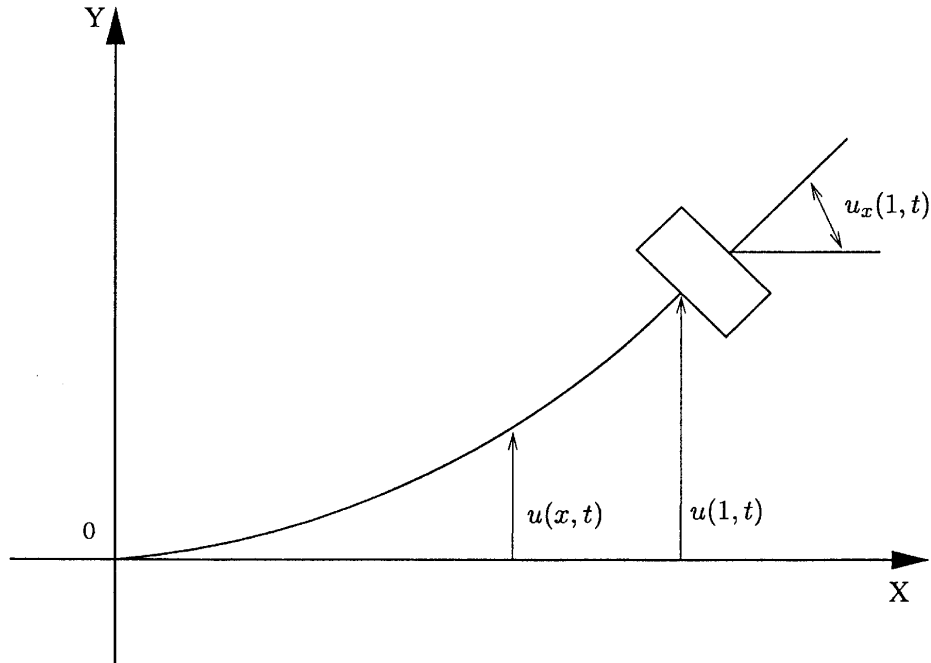
où  $L_1$  est le contrôle force, et  $L_2$  est le contrôle moment.

---

*Mots-clés et phrases :* Équation des poutres, contrôle frontière, stabilisation uniforme, analyse spectrale.

<sup>1</sup> Institut Elie Cartan, Université de Nancy 1, BP. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France; e-mail : [fsaouri@dim.uchile.cl](mailto:fsaouri@dim.uchile.cl), [Francis.Conrad@iecn.u-nancy.fr](mailto:Francis.Conrad@iecn.u-nancy.fr)

Dans la figure ci-dessous, on donne une représentation graphique du modèle étudié.



On choisit des contrôles en boucle fermée et les plus naturels consistent à prendre des combinaisons linéaires de la vitesse et de la vitesse de rotation, de telle sorte que le système soit dissipatif [12] et [13].

Considérons le choix le plus simple où  $\begin{cases} L_1(u, u_t) = -k_1 u_t(1, t) \\ L_2(u, u_t) = -k_2 u_{xt}(1, t) \end{cases}$ , avec  $k_1 \geq 0$ , et  $k_2 \geq 0$ .

Si  $m$  et  $J$  sont nuls on a stabilité uniforme. Pour  $k_1 > 0$  et  $k_2 \geq 0$  ce résultat a été prouvé par une méthode de multiplicateurs [2]. Pour  $k_1 = 0$  et  $k_2 > 0$  la stabilité uniforme a été prouvée dans [3], en utilisant un résultat de Huang [8], qui nécessite des estimations de la résolvante sur l'axe imaginaire.

Lorsque  $m$  et  $J$  sont positifs, on n'a pas de stabilité uniforme, car les contrôles sont des perturbations compactes du cas non contrôlé [13]. Donc si on veut une stabilité uniforme, une stratégie consiste à prendre des contrôles plus irréguliers [13]. Un cas particulier où l'on a un contrôle force assez irrégulier ( $m > 0, J = 0$ ) a été étudié dans [5].

Une autre stratégie, lorsqu'on a seulement une masse (respectivement un moment d'inertie), consiste à appliquer un contrôle moment (respectivement un contrôle force) naturel, du type ci-dessus. Précisons un peu selon les situations.

Dans le cas où la masse est nulle, il faut un contrôle force pour stabiliser uniformément le système et cela suffit qualitativement. L'adjonction d'un contrôle moment au contrôle force conservera la stabilité uniforme. Le problème a été traité assez complètement dans [4].

Ce papier est une contribution à l'étude du système lorsque le moment d'inertie est nul (cas d'une masse ponctuelle).

Dans [10] la stabilité uniforme a été prouvée pour ce cas. En complément, nous montrons que le système reste uniformément stable quand on ajoute un contrôle force, mais qu'un contrôle force ne suffit pas. La question principale qui restait ouverte pour  $J = 0$  et un contrôle moment seulement était d'estimer le taux optimal de décroissance exponentielle de l'énergie.

Nous apportons une réponse à cette question en utilisant des résultats de Shkalikov [17] sur les bases de Riesz. Ce type de méthode a aussi été appliqué dans [7] à des équations de type ondes ou poutres avec masse et contrôle moment. La théorie de Shkalikov est bien adaptée à des problèmes où les valeurs propres apparaissent

dans les conditions au bord. Elle permet d'obtenir un système de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz pour des problèmes de type Sturm–Liouville.

Le point technique délicat dans l'application de la méthode est de vérifier que l'opérateur obtenu par la théorie permet de reconstruire l'opérateur associé au système donné.

Le plan de l'article est le suivant. Après des rappels sur le problème au paragraphe 2, le résultat principal et l'essentiel de la preuve sont donnés dans le paragraphe 3. Le cas particulier où la masse est nulle est traité au paragraphe 4. Les deux points un peu techniques nécessaires pour compléter la preuve dans les paragraphes 3 et 4 sont donnés au paragraphe 5. Au paragraphe 6 on donne un résultat de stabilité uniforme et non uniforme comme indiqué ci-dessus. Enfin, dans un dernier paragraphe, on montre quelques simulations numériques concernant le calcul du spectre pour illustrer la variation du taux de décroissance optimal en fonction du paramètre de la commande.

## 2. FORMULATION DU PROBLÈME

On suppose que  $m = 1$ . Le système devient :

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < 1 & t \geq 0, \\ u_{tt}(1, t) - u_{xxx}(1, t) = 0 & & t \geq 0, \\ u_{xx}(1, t) + ku_{tx}(1, t) = 0 & & t \geq 0, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 & & t \geq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

L'énergie du système est :

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 u_t^2 dx + \int_0^1 u_{xx}^2 dx + u_t^2(1, t) \right].$$

L'espace d'énergie  $\mathcal{H}$  est défini par :

$$\mathcal{H} = \{(u, v, \eta)^\top \in H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R}, u(0) = u_x(0) = 0\}.$$

On munit l'espace d'énergie  $\mathcal{H}$  du produit scalaire :

$$\langle (u, v, \eta), (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta}) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (u_{xx}\tilde{u}_{xx} + v\tilde{v}) dx + \eta\tilde{\eta},$$

où  $U = (u, v, \eta)^\top$  et  $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta})^\top \in \mathcal{H}$ .

On définit l'opérateur linéaire  $\mathcal{A}$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \{(u, v, \eta)^\top \in H^4(0, 1) \times H^2(0, 1) \times \mathbb{R}, u_{xx}(1) + kv_x(1) = 0, \eta = v(1), \\ &u(0) = u_x(0) = 0, v(0) = v_x(0) = 0\}, \\ \mathcal{A}U &= (v, -u_{xxxx}, u_{xxx}(1))^\top, \text{ avec } U = (u, v, \eta)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le système (2.1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{U} = \mathcal{A}U \quad \text{et} \quad U(0) = U_0 \in \mathcal{H},$$

avec  $U = (u, u_t, \eta)^\top$ .

L'opérateur  $A$  engendre un semi-groupe de contractions  $S(t)$  (voir [10] et [11]).

Il est prouvé que si  $m > \frac{1}{3}$  (ici  $m = 1$ ), le système (2.1) est uniformément stable :  $\exists M \geq 1$  et  $\omega > 0$  tels que

$$E(t) \leq Me^{-\omega t} E(0) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall U_0 \in \mathcal{H}.$$

Pour la démonstration de ce théorème, voir [10].

### 3. RÉSULTAT PRINCIPAL

Dans la suite on va appliquer les résultats de Shkalikov [17] pour montrer que le taux optimal de décroissance de l'énergie est égal à l'abscisse spectrale de l'opérateur  $\mathcal{A}$ . On prend toujours  $m = 1$ , mais les résultats sont valables pour  $m > 0$  quelconque, indépendamment de la stabilité uniforme.

**Théorème 3.1.** *Le taux optimal de décroissance de l'énergie est égal à l'abscisse spectrale de l'opérateur  $\mathcal{A}$ .*

Le reste de ce paragraphe sera consacré à la démonstration du théorème.

On commence par donner l'équation caractéristique du système. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\mathcal{A}$  et soit  $U = (u, v, \eta)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  un vecteur propre qui lui est associé. On a donc  $\mathcal{A}U = \lambda U$ , ou encore

$$\begin{cases} u_{xxxx} + \lambda^2 u = 0, \\ u_{xxx}(1) - \lambda^2 u(1) = 0, \\ u_{xx}(1) + k\lambda u_x(1) = 0, \\ u(0) = u_x(0) = 0. \end{cases}$$

On pose  $\lambda = \tau^2$ , le système s'écrit de la manière suivante

$$\begin{cases} u_{xxxx} + \tau^4 u = 0, \\ u_{xxx}(1) - \tau^4 u(1) = 0, \\ u_{xx}(1) + k\tau^2 u_x(1) = 0, \\ u_x(0) = 0, \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Dans la suite, on utilisera les définitions et les notations de [17]. Les ordres respectifs des conditions au bord dans (3.1) sont :

$$k_1 = 4, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = 1 \quad \text{et} \quad k_4 = 0.$$

L'ordre total est donc  $k = 8$ .

L'équation caractéristique de la première équation de (3.1) est

$$\omega^4 + 1 = (\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1)(\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1) = 0,$$

dont les racines sont

$$\omega_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \omega_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Le plus petit polygone convexe contenant toutes les sommes possibles des  $\omega_i$  est donc le polygone  $\mathcal{M}$  de sommets  $(\pm\sqrt{2}; 0)$  et  $(0; \pm\sqrt{2})$ .

Les solutions de (3.1) seront de la forme

$$u(x) = c_1 e^{\tau\omega_1 x} + c_2 e^{\tau\omega_2 x} + c_3 e^{\tau\omega_3 x} + c_4 e^{\tau\omega_4 x}.$$

On pose

$$\begin{aligned} f(\tau, \omega) &= \tau^3 e^{\tau\omega} (\omega^3 - \tau), \\ g(\tau, \omega) &= \tau^2 \omega e^{\tau\omega} (\omega + k\tau). \end{aligned}$$

En substituant  $u$  dans les conditions aux bords du système (3.1), on obtient

$$\begin{bmatrix} f(\tau, \omega_1) & f(\tau, \omega_2) & f(\tau, \omega_3) & f(\tau, \omega_4) \\ g(\tau, \omega_1) & g(\tau, \omega_2) & g(\tau, \omega_3) & g(\tau, \omega_4) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_2 & \tau\omega_3 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

On notera par  $\Delta(\tau)$  le déterminant caractéristique du système linéaire et homogène (3.2). Ce dernier a une solution non nulle si et seulement si  $\tau$  est racine du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  qui est égal à

$$f(\tau, \omega_1) \begin{vmatrix} g(\tau, \omega_2) & g(\tau, \omega_3) & g(\tau, \omega_4) \\ \tau\omega_2 & \tau\omega_3 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - f(\tau, \omega_2) \begin{vmatrix} g(\tau, \omega_1) & g(\tau, \omega_3) & g(\tau, \omega_4) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_3 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + f(\tau, \omega_3) \begin{vmatrix} g(\tau, \omega_1) & g(\tau, \omega_2) & g(\tau, \omega_4) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_2 & \tau\omega_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - f(\tau, \omega_4) \begin{vmatrix} g(\tau, \omega_1) & g(\tau, \omega_2) & g(\tau, \omega_3) \\ \tau\omega_1 & \tau\omega_2 & \tau\omega_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Un calcul direct donne :

$$\Delta(\tau) = \tau^8 \left\{ e^{i\tau\sqrt{2}} \left[ -2k + i2\sqrt{2}(k-1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] \right. \\ + e^{\tau\sqrt{2}} \left[ -2k - 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] \\ + e^{-\tau\sqrt{2}} \left[ -2k + 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] \\ \left. + e^{-i\tau\sqrt{2}} \left[ -2k + i2\sqrt{2}(1-k)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] + 8k - 8k\tau^{-2} \right\}. \tag{3.3}$$

**Remarque.** Pour  $|\tau|$  assez grand, le terme dominant des expressions entre crochets de (3.3) est  $-2k$  qui est différent de 0 ( $k$  non nul), donc les conditions aux bords de (3.1) sont régulières au sens de Shkalikov. On montre qu'elles sont fortement régulières, c'est-à-dire que les racines de  $\Delta$  sont asymptotiquement simples et séparées.

### 3.1. Comportement asymptotique des valeurs propres

Rappelons que :

$$\Delta(\tau) = \tau^8 \left\{ e^{i\tau\sqrt{2}} \left[ -2k + i2\sqrt{2}(k-1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] + e^{\tau\sqrt{2}} \left[ -2k - 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. - 2\tau^{-2} \right] + e^{-\tau\sqrt{2}} \left[ -2k + 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] + e^{-i\tau\sqrt{2}} \left[ -2k \right. \right. \\ \left. \left. + i2\sqrt{2}(1-k)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] + 8k - 8k\tau^{-2} \right\}.$$

On pose

$$P(\tau) = e^{i\tau\sqrt{2}} \left[ -k\tau^2 + i\sqrt{2}(k-1)\tau - 1 \right] + e^{\tau\sqrt{2}} \left[ -k\tau^2 - \sqrt{2}(k+1)\tau - 1 \right] \\ + e^{-\tau\sqrt{2}} \left[ -k\tau^2 + \sqrt{2}(k+1)\tau - 1 \right] + e^{-i\tau\sqrt{2}} \left[ -k\tau^2 + i\sqrt{2}(1-k)\tau - 1 \right] \\ + 4k\tau^2 - 4k, \\ \tilde{P}(\tau) = e^{\tau\sqrt{2}} \left[ -k\tau^2 - \sqrt{2}(k+1)\tau - 1 \right] + e^{-i\tau\sqrt{2}} \left[ -k\tau^2 + i\sqrt{2}(1-k)\tau - 1 \right].$$

Dans ce qui suit, on montre que les racines de  $P$  sont asymptotiquement celles de  $\tilde{P}$ , dans un secteur à déterminer. On se réfère aux travaux de Langer [9], qui ont déjà été utilisés dans la thèse de Chentouf [4].

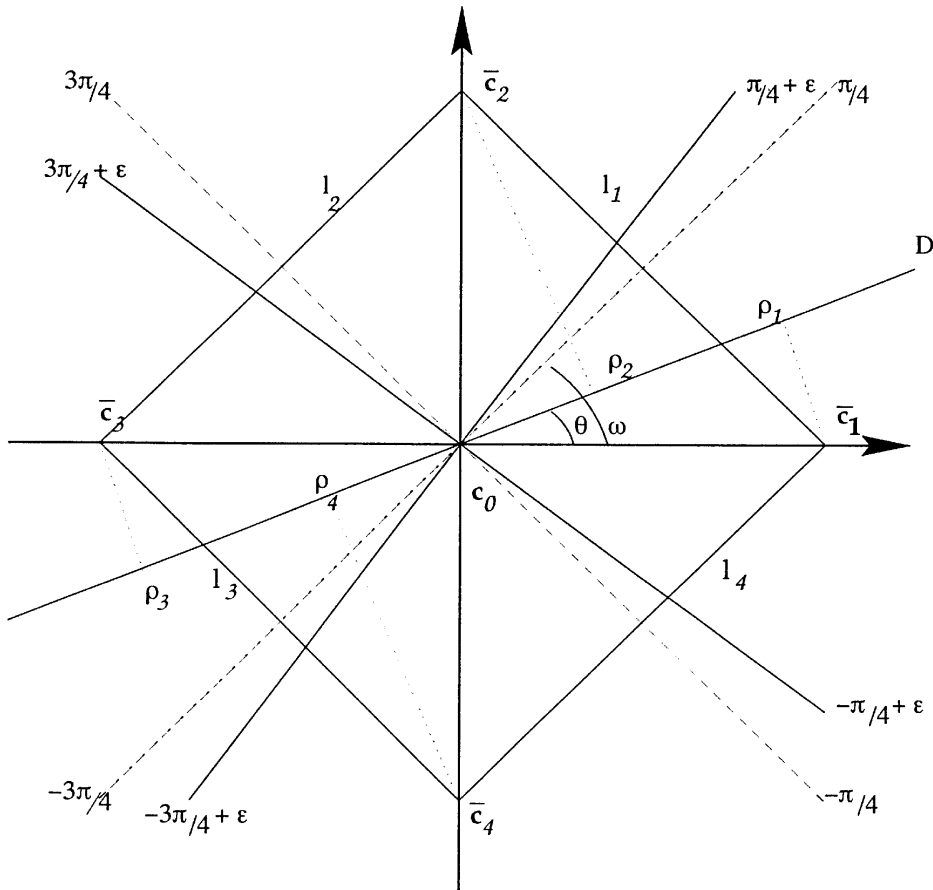
On considère le polygone  $\mathcal{M}$  de centre O et qui a pour sommets :  $\sqrt{2}$ ,  $i\sqrt{2}$ ,  $-\sqrt{2}$ , et  $-i\sqrt{2}$  notés  $\bar{c}_1$ ,  $\bar{c}_2$ ,  $\bar{c}_3$ , et  $\bar{c}_4$  (voir figure ci-après).

On note par  $l_i$  le côté  $[\bar{c}_i \bar{c}_{i+1}]$ , par  $w_i$  l'angle d'inclinaison entre la normale au côté  $l_i$  et l'axe horizontal, et par  $D_i$  la droite

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} / \text{Arg}z = \theta; \quad w_{i-1} + \epsilon \leq \theta < w_i + \epsilon, \text{ pour } i = 1, \dots, 4\}, \text{ avec } \epsilon > 0.$$

Soit  $S_i$  le secteur :  $\{z \in \mathbb{C} / w_{i-1} + \epsilon \leq \text{arg}z < w_i + \epsilon\}$ .

On a :  $\bigcup_{i=1}^4 S_i = \mathbb{C}$ .



Remarquons que :

$$\begin{cases} P(\tau) = P(-\tau), \\ P(\bar{\tau}) = \overline{P(\tau)}. \end{cases}$$

Donc l'ensemble des racines de  $P$  a une symétrie par rapport à l'origine, et une symétrie par rapport à l'axe des réels.

Par conséquent, il suffit de considérer  $P$  dans deux secteurs consécutifs, par exemple, dans le secteur  $S_1$  et le secteur  $S_2$ . Et comme l'étude est similaire dans ces deux secteurs, on développera les calculs seulement dans le secteur  $S_1$ , et on donnera le développement asymptotique des racines de  $P$  dans  $S_2$  à la fin de ce paragraphe.

Soit le secteur

$$S_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{-\pi}{4} + \epsilon \leq \text{Arg}z < \frac{\pi}{4} + \epsilon \right\}.$$

Pour  $z$  appartenant à  $D_1$ , on a

$$|z^{\alpha_j} e^{c_j z}| = e^{|z| \left\{ x_j \cos \theta + y_j \sin \theta + \alpha_j \frac{\log |z|}{|z|} \right\}}, \text{ où } c_j = x_j - iy_j.$$

Remarquons que l'amplitude du terme  $|z^{\alpha_j} e^{c_j z}|$  est déterminée par celle de  $\{x_j \cos \theta + y_j \sin \theta\}$ , qui n'est autre que la projection orthogonale du vecteur  $\bar{c}_j$  sur la droite  $D_1$ .

Ces projections sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{2} \cos \theta, & \rho_2 &= \sqrt{2} \sin \theta, \\ \rho_3 &= -\sqrt{2} \cos \theta, & \rho_4 &= -\sqrt{2} \sin \theta. \end{aligned}$$

Notons que pour tout  $\bar{c}_j \notin l_1$  (dans ce cas  $j \neq 1, 2$ ),

$$x_j \cos \theta + y_j \sin \theta < x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta.$$

Donc pour tout  $z \in S_1$  et  $j \neq 1, 2$  :  $z^{\alpha_j} e^{c_j z} = z^{\alpha_1} e^{c_1 z} \epsilon(z)$ .

**Théorème 3.2** (voir [9]). *Soit  $Q$  une fonction définie sur  $\mathbb{C}$  par :  $Q(z) = \sum_{j=0}^n z^{\nu_j} \{a_j + \epsilon_j(z)\} e^{c_j z}$ ; où  $a_j \in \mathbb{C}$ , avec  $a_0 a_n \neq 0$ ,  $\nu_j \in \mathbb{R}$ , et les  $\epsilon_j$  sont des fonctions analytiques dans tout le secteur  $S_i$  ( $i$  fixé) et qui tendent uniformément vers zéro quand  $|z|$  tend vers  $+\infty$ .*

*Alors dans ce secteur  $S_i$ , les zéros de  $Q$  sont asymptotiques à ceux de :  $\sum_{j \in K_i} a_j z^{\nu_j} e^{c_j z}$ , où  $K_i$  est la partie de  $\{1, \dots, n\}$  qui contient les  $j$  tels que  $\bar{c}_j \in l_i$ .*

D'après ce théorème les racines de  $P$  sont asymptotiques à celles de :

$$e^{\tau \sqrt{2}} + e^{-i\tau \sqrt{2}} = 0.$$

Les racines de  $P$  sont donc de la forme :

$$\tau_n = \omega \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \text{où } \omega = \frac{i+1}{\sqrt{2}}.$$

On calcule maintenant  $x$  et  $y$ .

$$\begin{aligned} e^{\tau_n \sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2} \omega \pi \left( n + \frac{1}{2} \right)} e^{\sqrt{2} \frac{x}{n} + \sqrt{2} \frac{y}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)} \\ &= e^{(\pi + i\pi) \left( n + \frac{1}{2} \right)} \left[ 1 + \sqrt{2} \frac{x}{n} + \sqrt{2} \frac{y}{n^2} + \frac{x^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]. \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} X = \sqrt{2}x, \\ Y = \sqrt{2}y, \\ e^{\pi(n+\frac{1}{2})} = K. \end{cases}$$

Donc

$$e^{\tau_n \sqrt{2}} = iK(-1)^n \left[ 1 + \frac{X}{n} + \frac{Y}{n^2} + \frac{X^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right].$$

De même

$$e^{-i\tau_n\sqrt{2}} = iK(-1)^n \left[ -1 + i\frac{X}{n} + i\frac{Y}{n^2} + \frac{X^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right].$$

Dans  $P$  les termes dominants sont les termes en  $e^{-i\tau\sqrt{2}}$  et  $e^{\tau\sqrt{2}}$ . Pour avoir les expressions de  $X$  et de  $Y$ , il suffit d'injecter le développement de  $e^{-i\tau_n\sqrt{2}}$  et de  $e^{\tau_n\sqrt{2}}$  dans  $\tilde{P}(\tau_n)$  qui devient :

$$\begin{aligned} & iK(-1)^n \left\{ \left[ 1 + \frac{X}{n} + \frac{Y}{n^2} + \frac{X^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] \left[ -ik\pi^2 n^2 + (-ik\pi^2 - (i+1)(k+1)\pi) n \right. \right. \\ & + \left. \left. \left( -ik\frac{\pi^2}{4} - 2k\omega\pi\frac{X}{\sqrt{2}} - (i+1)(k+1)\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \left( -k\omega\pi\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + 2\frac{Y}{\sqrt{2}}\right) - (k+1)X \right) \frac{1}{n} \right] \right. \\ & + \left[ -1 + i\frac{X}{n} + i\frac{Y}{n^2} + \frac{X^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] \left[ -ik\pi^2 n^2 + (-ik\pi^2 + (i-1)(1-k)\pi) n \right. \\ & + \left. \left. \left( -ik\frac{\pi^2}{4} - 2k\omega\pi\frac{X}{\sqrt{2}} + (i-1)(1-k)\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \left( -k\omega\pi\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{2}}\right) + i(1-k)X \right) \frac{1}{n} \right] \\ & \left. + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\tau_n) = & iK(-1)^n \left\{ -2(i+1)\pi X - ik\pi^2 X^2 + k\pi^2(1-i)Y - (k+i)\pi \right. \\ & \left. + k\pi^2(1-i)X + \pi n[-2(i+k) + k\pi X(1-i)] + \frac{A}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}, \end{aligned}$$

où  $A$  est une constante.

On choisit  $X$  tel que le coefficient en  $n$  soit nul, et on choisit  $Y$  tel que le terme constant soit nul. Ce qui nous donne

$$\begin{cases} -2(i+k) + k\pi X(1-i) = 0, \\ -2(i+1)\pi X - ik\pi^2 X^2 + k\pi^2(1-i)Y - (k+i)\pi + k\pi^2(1-i)X = 0. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} X = \frac{(i+k)(1+i)}{k\pi}, \\ Y = -\frac{(1+k^2)(1+i)}{k^2\pi^2} - \frac{(i+k)(1+i)}{2k\pi}. \end{cases}$$

Or on a fait le changement de variable:  $X = x\sqrt{2}$ , et  $Y = y\sqrt{2}$ .

Finalement

$$\begin{cases} x = \omega \frac{(i+k)}{k\pi}, \\ y = -\omega \left\{ \frac{(1+k^2)}{k^2\pi^2} + \frac{(i+k)}{2k\pi} \right\}. \end{cases}$$

$$\text{D'où } \tau_n = \omega\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) + \omega \frac{(i+k)}{k\pi n} - \omega \left\{ \frac{(1+k^2)}{k^2\pi^2 n^2} + \frac{(i+k)}{2k\pi n^2} \right\}.$$



Sachant que  $\lambda_n = \tau_n^2$ , on a donc

$$\lambda_n = -\frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{n}\right) + i \left( 2 + \pi^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Le calcul de  $\Re \tau_n$  s'en déduit :

$$\Re \tau_n = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{(k-1)}{\sqrt{2}k\pi n} - \frac{(k^2+1)}{\sqrt{2}k^2\pi^2 n^2} + \frac{(1-k)}{2\sqrt{2}k\pi n^2}.$$

Il est clair que lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $|\Re \tau_{n+1} - \Re \tau_n| > \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

Dans le secteur  $S_2$

$$\begin{cases} \tau_n = \omega' \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) + \omega' \left\{ \frac{(k-i)}{k\pi n} \right\} + \omega' \left\{ \frac{(1+k^2)}{k^2\pi^2 n^2} + \frac{(i-k)}{2k\pi n^2} \right\}, \\ \lambda_n = -\frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{n}\right) - i \left( 2 + \pi^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \end{cases}$$

avec  $\omega' = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$ .

Les zéros du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  sont asymptotiquement séparés. On montre au paragraphe 5 qu'ils sont aussi asymptotiquement simples (l'expression de la partie réelle de  $\tau_n$  sera utile). D'où la régularité forte du problème (3.1).

### 3.2. Application de la théorie de Shkalikov

Dans cette partie, on suit la méthode et les notations de [17] pour construire un opérateur noté  $H_r$  et appelé linéarisé de Shkalikov, de telle manière que le problème au bord (3.1) se ramène au problème linéaire  $H_r(\tilde{v}) = \tau \tilde{v}$ , où  $\tilde{v}$  appartient à un espace  $D(H_r)$  qu'on définira ultérieurement.

Pour  $j \geq 0$  entier,  $W_2^j(0,1)$  est l'espace de Sobolev classique, et pour tout entier  $r$ , on note :  $W_2^r = W_2^{n-1+r}(0,1) \oplus W_2^{n-2+r}(0,1) \oplus \dots \oplus W_2^r(0,1)$ , avec ici  $n = 4$ , et

$$W_{2,U}^r = \left\{ \tilde{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in W_2^r : \tilde{U}_j(H^k \tilde{v}, \tau) = \tilde{U}_j(H^k \tilde{v}) = 0, \text{ pour } 0 \leq k \leq n+r-2, \right.$$

et l'ordre de toutes les conditions aux bords  $\leq n+r-2-k$   $\left. \right\}$ .

On écrit (3.1) sous la forme

$$\begin{cases} \ell(u, \tau) = \ell_0(u) + \tau \ell_1(u) + \tau^2 \ell_2(u) + \tau^3 \ell_3(u) + \tau^4 \ell_4(u) = 0, \\ U_1(u, \tau) = u'''(1) - \tau^4 u(1) = 0, \\ U_2(u, \tau) = u''(1) + k\tau^2 u'(1) = 0, \\ U_3(u, \tau) = u'(0) = 0, \\ U_4(u, \tau) = u(0) = 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

où  $\ell_0(u) = u_{xxxx}$ ,  $\ell_1(u) = \ell_2(u) = \ell_3(u) = 0$ , et  $\ell_4(u) = u$ .

On définit l'opérateur  $H$  dans  $W_{2,U}^0$  par

$$H \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -v_0'''' \end{bmatrix} \text{ et } D(H) = W_{2,U}^1,$$

avec

$$W_{2,U}^0 = \left\{ \tilde{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in W_2^3(0, 1) \oplus W_2^2(0, 1) \oplus W_2^1(0, 1) \oplus L^2(0, 1), \right. \\ \left. \tilde{U}_j(H^k \tilde{v}, \tau) = \tilde{U}_j(H^k \tilde{v}) = 0, 1 \leq j \leq 4, \text{ pour } 0 \leq k \leq n - 2 = 2 \right. \\ \left. \text{et l'ordre de toutes les conditions aux bords } \leq 2 - k \right\}$$

$$W_{2,U}^0 = \left\{ \tilde{v} \in W_2^3(0, 1) \oplus W_2^2(0, 1) \oplus W_2^1(0, 1) \oplus L^2(0, 1), \right. \\ \left. v_0'(0) = 0, v_0(0) = 0, v_1'(0) = 0, v_1(0) = 0, v_2(0) = 0 \right\}$$

et

$$W_{2,U}^1 = \left\{ \tilde{v} \in W_2^4(0, 1) \oplus W_2^3(0, 1) \oplus W_2^2(0, 1) \oplus W_2^1(0, 1), \right. \\ \left. v_0''(1) + kv_2'(1) = 0, v_0'(0) = 0, v_0(0) = 0, \right. \\ \left. v_1'(0) = 0, v_1(0) = 0, v_2'(0) = 0, v_2(0) = 0, v_3(0) = 0 \right\}.$$

Pour normaliser les conditions au bord de (3.4) le terme  $\tau^4 u(1)$  sera remplacé par  $\tau v_3(1)$ , et le terme  $\tau^2 u'(1)$  sera remplacé par  $v_2'(1)$ , les autres conditions aux bords ne changent pas. On les représente sous la forme  $\tilde{U}_j(\tilde{v}, \tau) = \sum_{i=0}^{\nu_j(r)} \tau^i \tilde{U}_j^i(\tilde{v})$ , où les  $\tilde{U}_j^i$  ne dépendent pas de  $\tau$

$$\begin{cases} \tilde{U}_1(\tilde{v}, \tau) = -v_0''''(1) + \tau v_3(1) = 0, \\ \tilde{U}_2(\tilde{v}, \tau) = v_0''(1) + kv_2'(1) = 0, \\ \tilde{U}_3(\tilde{v}, \tau) = v_0'(0) = 0, \\ \tilde{U}_4(\tilde{v}, \tau) = v_0(0) = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

D'après le système (3.5) et les notations de [17], on a  $\nu_1(0) = 1$  et  $\nu_2(0) = \nu_3(0) = \nu_4(0) = 0$ , donc  $N_0 = \sum_{j=1}^4 \nu_j(0) = 1$ .

L'espace qui convient sera alors  $W_{2,U}^0 \oplus \mathbb{C}^{N_0} = W_{2,U}^0 \oplus \mathbb{C}$ , où on définit l'opérateur  $H_0$  (ici  $r = 0$ ) par

$$H_0 \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -v_0'''' \\ v_0''''(1) \end{bmatrix},$$

et

$$D(H_0) = \{(v_0, v_1, v_2, v_3, w) \in W_{2,U}^1 \oplus \mathbb{C}, w = v_3(1)\}.$$

D'après le théorème 3.1 de Shkalikov, et vu la régularité forte du système (3.1), l'opérateur  $H_0$ , a un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de l'espace  $W_{2,U}^0 \oplus \mathbb{C}$ .

Rappelons qu'on avait fait le changement de variable :  $\lambda = \tau^2$ . Sachant que  $\tau$  est une valeur propre de  $H_0$ , alors  $\lambda = \tau^2$  est une valeur propre de  $H_0^2$ , qui sera défini par :

$$H_0^2 \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ -v_0'''' \\ -v_1'''' \\ v_1''(1) \end{bmatrix}, \quad D(H_0^2) = W_{2,U}^2 \oplus \mathbb{C} \subset W_{2,U}^0 \oplus \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned} D(H_0^2) &= \left\{ (v_0, v_1, v_2, v_3, w) \in D(H_0) / H_0(v_0, v_1, v_2, v_3, w) \in D(H_0) \right\} \\ &= \left\{ (v_0, v_1, v_2, v_3, w) \in W_2^5(0, 1) \oplus W_2^4(0, 1) \oplus W_2^3(0, 1) \oplus W_2^2(0, 1) \oplus \mathbb{C}, \right. \\ &\quad v_0''(1) + kv_2'(1) = 0, v_0'(0) = 0, v_0(0) = 0, \\ &\quad v_2'(0) = 0, v_2(0) = 0, v_0''''(0) = 0, v_0''''(1) = -v_0''''(1), \\ &\quad v_1''(1) + kv_3'(1) = 0, v_1'(0) = 0, v_1(0) = 0, \\ &\quad \left. v_3'(0) = 0, v_3(0) = 0, w = v_3(1) \right\}. \end{aligned}$$

Les vecteurs propres généralisés de  $H_0$  sont aussi vecteurs propres généralisés de  $H_0^2$ .

En effet, soit  $\phi_n$  un vecteur propre généralisé de  $H_0$ , associé à la valeur propre  $\tau_n$ .

On a  $(H_0 - \tau_n)^\alpha \phi_n = 0$ , avec  $\alpha \in \mathbb{N}$ , ce qui implique

$$(H_0^2 - \tau_n^2 I)^\alpha \phi_n = (H_0 + \tau_n I)^\alpha (H_0 - \tau_n I)^\alpha \phi_n = 0.$$

En fait, par le théorème de Hilbert–Dirac [1] (Th. 5.2) dans le cas d'un corps algébriquement clos, le sous-espace spectral de  $H_0^2$  associé à une valeur propre  $\mu$  de  $H_0^2$  est la somme directe des sous espaces spectraux de  $H_0$  associé aux valeurs propres  $\lambda$  telles que  $\lambda^2 = \mu$ .

Il est donc clair que l'opérateur  $H_0^2$  a un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de  $W_{2,U}^0 \oplus \mathbb{C}$ .

Remarquons que l'opérateur  $H_0^2$  se décompose en une somme directe de deux opérateurs :

$$H_0^2 = H_1 \oplus H_2,$$

avec  $H_1$  opérant sur  $v_1, v_3$  et  $w$ , et  $H_2$  opérant sur  $v_0, v_2$ .  $H_1$  sera défini par :

$$H_1 \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -u_{xxxx} \\ u_{xxx}(1) \end{bmatrix}$$

$$D(H_1) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in W_2^4(0, 1) \oplus W_2^2(0, 1) \oplus \mathbb{C}/u''(1) + kv'(1) = 0, w = v(1), \right. \\ \left. u'(0) = 0, u(0) = 0, v'(0) = 0, v(0) = 0 \right\}.$$

On voit bien que  $H_1$  est exactement l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

On a montré, jusqu'à présent, qu'on a une base de Riesz pour l'opérateur

$$H_0^2 = H_1 \oplus H_2.$$

Les opérateurs  $H_1$  et  $H_2$  ont la même équation caractéristique. En effet dans les domaines respectifs de  $H_1$  et  $H_2$ , on a les mêmes conditions au bord excepté ( $v_0'''(1) = -v_0''''(1)$ ,  $v_0''''(0) = 0$ ) pour  $H_2$  et ( $w = v_3(1)$ ) pour  $H_1$ . Ces relations sont équivalentes (vérification facile). Les opérateurs  $H_1$  et  $H_2$  ont les mêmes valeurs propres.

On sait que  $H_0^2$  engendre un semi-groupe  $S_{H_0^2}(t)$  dans  $W_{2,U}^0 \oplus \mathbb{C} = \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$  (où  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont les espaces relatifs à  $H_1$  et  $H_2$  qu'on "extraît" de  $\mathcal{L}$ ), et admet un système de vecteurs propres généralisés  $\begin{pmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}$  qui forme une base de Riesz de  $\mathcal{L}$ . Donc :

$$\forall z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L} : z = \sum_n z_n \begin{pmatrix} \phi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

avec

$$C_1 \sum_n |z_n|^2 \leq |z|_{\mathcal{L}}^2 \leq C_2 \sum_n |z_n|^2$$

on a

$$|S_{H_0^2}(t)z|_{\mathcal{L}} \leq M_\varepsilon |z|_{\mathcal{L}} \exp(\omega + \varepsilon)t \quad \forall \varepsilon > 0$$

où  $\omega = \sup_{\lambda_i \in sp(H_0^2)} \Re \lambda_i$ .

Cette dernière estimation qui s'obtient en développant  $S_{H_0^2}(t)z$  dans la base de Riesz et en utilisant les estimations de  $|z|_{\mathcal{L}}^2$  est classique. Elle est bien entendu valable car il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres non algébriquement simples (les valeurs propres sont asymptotiquement simples d'après une remarque antérieure).

Comme  $H_1$  et  $H_2$  ont le même spectre, alors :

$$S_{H_0^2}(t) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{H_1}(t)x \\ 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent :

$$\left| S_{H_0^2}(t) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right|_{\mathcal{L}} = |S_{H_1}(t)x|_{\mathcal{L}_1} \leq M_\varepsilon \left| \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right|_{\mathcal{L}} \exp(\omega + \varepsilon)t = M_\varepsilon |x|_{\mathcal{L}_1} \exp(\omega + \varepsilon)t$$

où  $\omega = \sup_{\lambda \in sp(H_0^2)} \Re \lambda = \sup_{\lambda \in sp(H_1)} \Re \lambda$ .

Par ailleurs, on sait que le rayon spectral du semi-groupe  $S_{H_1}(t)$  engendré par  $H_1$  est toujours supérieur à  $\sup_{\lambda \in sp(H_1)} \Re \lambda = \sup_{\lambda \in sp(H_0^2)} \Re \lambda$ .

On en déduit donc que le meilleur taux de décroissance pour l'opérateur  $H_1$  est bien égal à  $\sup_{\lambda \in sp(H_1)} \Re \lambda$ .

## 4. CAS PARTICULIER DE MASSE NULLE

 • **Problème bien posé**

Ce cas est un peu plus simple, dans la mesure où en l'absence de la masse, la variable  $u_t(1)$  n'apparaît pas dans le problème abstrait. De même, il n'y a pas de composante dans  $\mathbb{C}$  lorsque l'on construit l'espace de Shkalikov.

Le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < 1 & t \geq 0, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xxx}(1, t) = 0 & & t \geq 0, \\ u_{xx}(1, t) = -ku_{xt}(1, t) & & t \geq 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

On associe au système (4.1) l'énergie :

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 u_t^2 dx + \int_0^1 u_{xx}^2 dx \right].$$

Comme

$$\frac{dE(t)}{dt} = -ku_{xt}^2(1, t) \leq 0,$$

le système (4.1) est dissipatif.

Introduisons les espaces suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{u \in H^2(0, 1) ; u(0) = u_x(0) = 0\}, \\ \mathcal{H} &= \{(u, v)^\top ; u \in \mathcal{V}, v \in L^2(0, 1)\}. \end{aligned}$$

On munit l'espace d'énergie  $\mathcal{H}$  du produit scalaire :

$$\langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (u_{xx}\tilde{u}_{xx} + v\tilde{v}) dx$$

où  $U = (u, v)^\top$  et  $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v})^\top \in \mathcal{H}$ .

On définit l'opérateur linéaire  $\mathcal{A}$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}) &= \{(u, v)^\top / u \in H^4(0, 1) \cap \mathcal{V}, v \in \mathcal{V} ; u_{xxx}(1) = 0, u_{xx}(1) = -kv_x(1)\}, \\ \mathcal{A}U &= (v, -u_{xxxx})^\top, \text{ si } U = (u, v)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Le système (4.1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{U} = \mathcal{A}U \quad \text{et} \quad U(0) = U_0 \in \mathcal{H},$$

avec  $U = (u, u_t)^\top$ .

Chen *et al.* [3] ont montré que l'opérateur  $\mathcal{A}$  engendre un semi-groupe de contractions uniformément stable sur  $\mathcal{H}$ , que  $\mathcal{A}$  est inversible et  $\mathcal{A}^{-1}$  est compact dans  $\mathcal{H}$ . Ils ont utilisé un théorème de Huang [8] pour montrer la stabilité uniforme.

On cherche maintenant à obtenir le taux optimal de décroissance de l'énergie  $E(t)$ . Pour cela, on procède comme au paragraphe 3.

 • **Analyse spectrale**

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\mathcal{A}$  et soit  $\mathcal{U} = (u, v)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  un vecteur propre qui lui est associé.

On a :

$$\mathcal{A} \mathcal{U} = \lambda \mathcal{U}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \lambda u - v = 0, \\ \lambda v + u_{xxxx} = 0, \\ u_{xxx}(1) = u_x(0) = u(0) = 0, \\ u_{xx}(1) = -k v_x(1). \end{cases}$$

En remplaçant  $v$  en fonction de  $u$ , on obtient

$$\begin{cases} u_{xxxx} + \lambda^2 u = 0, \\ u_{xx}(1) = -k \lambda u_x(1), \\ u_{xxx}(1) = 0, \\ u_x(0) = 0, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

On pose  $\lambda = \tau^2$ , le système devient :

$$\begin{cases} u_{xxxx} + \tau^4 u = 0, \\ u_{xxx}(1) = 0, \\ u_{xx}(1) = -k \tau^2 u_x(1), \\ u_x(0) = 0, \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Dans la suite, on utilisera les définitions et les notations de [17]. Les ordres respectifs des conditions au bord dans (4.3) sont :

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = 1 \quad \text{et} \quad k_4 = 0.$$

L'ordre total est donc  $k = 7$ .

L'équation caractéristique de la première équation de (4.3) est :

$$\omega^4 + 1 = (\omega^2 - \sqrt{2}\omega + 1)(\omega^2 + \sqrt{2}\omega + 1) = 0,$$

dont les racines sont :

$$\omega_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \omega_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Les solutions de (4.3) sont de la forme :

$$u(x) = c_1 e^{\tau \omega_1 x} + c_2 e^{\tau \omega_2 x} + c_3 e^{\tau \omega_3 x} + c_4 e^{\tau \omega_4 x}.$$

On pose :

$$f(\tau, \omega) = \tau^2 \omega e^{\tau \omega} (\omega + k \tau).$$

En substituant  $u$  dans les conditions au bord du système (4.3), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \tau^3 \omega_1^3 e^{\tau \omega_1} & \tau^3 \omega_2^3 e^{\tau \omega_2} & \tau^3 \omega_3^3 e^{\tau \omega_3} & \tau^3 \omega_4^3 e^{\tau \omega_4} \\ f(\tau, \omega_1) & f(\tau, \omega_2) & f(\tau, \omega_3) & f(\tau, \omega_4) \\ \tau \omega_1 & \tau \omega_2 & \tau \omega_3 & \tau \omega_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

On notera par  $\Delta(\tau)$  le déterminant caractéristique du système linéaire homogène (4.4). Ce dernier a donc une solution non nulle si et seulement si  $\tau$  est racine de :

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) = & \tau^3 \omega_1^3 e^{\tau \omega_1} \begin{vmatrix} f(\tau, \omega_2) & f(\tau, \omega_3) & f(\tau, \omega_4) \\ \tau \omega_2 & \tau \omega_3 & \tau \omega_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \tau^3 \omega_2^3 e^{\tau \omega_2} \begin{vmatrix} f(\tau, \omega_1) & f(\tau, \omega_3) & f(\tau, \omega_4) \\ \tau \omega_1 & \tau \omega_3 & \tau \omega_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ & + \tau^3 \omega_3^3 e^{\tau \omega_3} \begin{vmatrix} f(\tau, \omega_1) & f(\tau, \omega_2) & f(\tau, \omega_4) \\ \tau \omega_1 & \tau \omega_2 & \tau \omega_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \tau^3 \omega_4^3 e^{\tau \omega_4} \begin{vmatrix} f(\tau, \omega_1) & f(\tau, \omega_2) & f(\tau, \omega_3) \\ \tau \omega_1 & \tau \omega_2 & \tau \omega_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) = & \tau^6 \left\{ i\sqrt{2}e^{i\tau\sqrt{2}}[(\omega_1 + \omega_2) + 2k\tau] - \sqrt{2}e^{\tau\sqrt{2}}[(\omega_4 + \omega_1) + 2k\tau] \right. \\ & + \sqrt{2}e^{-\tau\sqrt{2}}[(\omega_2 + \omega_3) + 2k\tau] - i\sqrt{2}e^{-i\tau\sqrt{2}}[(\omega_3 + \omega_4) + 2k\tau] \\ & \left. + (1 - i)\sqrt{2}(\omega_3 - \omega_1) + (1 + i)\sqrt{2}(\omega_2 - \omega_4) \right\}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) = & \tau^7 \left\{ e^{i\tau\sqrt{2}}[2i\sqrt{2}k - 2\tau^{-1}] - e^{-i\tau\sqrt{2}}[2i\sqrt{2}k + 2\tau^{-1}] \right. \\ & \left. - e^{\tau\sqrt{2}}[2\sqrt{2}k + 2\tau^{-1}] + e^{-\tau\sqrt{2}}[2\sqrt{2}k - 2\tau^{-1}] - 8\tau^{-1} \right\}. \tag{4.5} \end{aligned}$$

Pour  $|\tau|$  assez grand, le terme dominant des expressions entre crochets de (4.5) est différent de 0 ( $k$  est non nul), donc les conditions au bord de (4.3) sont régulières au sens de Shkalikov. On montrera dans la suite que les racines du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  sont asymptotiquement simples et séparées et par suite que les conditions au bord sont fortement régulières (voir Paragr. 5).

Cette propriété est essentielle pour montrer l'existence d'une base de Riesz formée de vecteurs propres généralisés de l'opérateur de Shkalikov.

La méthode est identique au cas où la masse est non nulle. On écrit (4.3) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ell(u, \tau) = \ell_0(u) + \tau \ell_1(u) + \tau^2 \ell_2(u) + \tau^3 \ell_3(u) + \tau^4 \ell_4(u) = 0, \\ U_1(u, \tau) = u'''(1) = 0, \\ U_2(u, \tau) = u''(1) + k\tau^2 u'(1) = 0, \\ U_3(u, \tau) = u'(0) = 0, \\ U_4(u, \tau) = u(0) = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

L'opérateur  $H$  est le même que dans le cas où la masse est non nulle.

On va voir qu'ici l'opérateur  $H_0$  n'est autre que  $H$ , car aucune condition au bord (après normalisation) ne dépend de  $\tau$ . On montre l'existence d'une base de Riesz, dans l'espace  $W_{2,U}^r$ , formée de vecteurs propres généralisés de l'opérateur  $H_r$ .

Le terme  $\tau^2 u'(1)$  dans (4.6) sera remplacé par :  $H^2(\tilde{v})_0^{(1)}(1) = v_2'(1)$ , où  $H^k$  est la puissance d'ordre  $k$  de  $H$ , les autres conditions au bord ne changent pas. On les représente sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{U}_1(\tilde{v}, \tau) = \tilde{U}_1(\tilde{v}) = v_0'''(1) = 0, \\ \tilde{U}_2(\tilde{v}, \tau) = \tilde{U}_2(\tilde{v}) = v_0''(1) + kv_2'(1) = 0, \\ \tilde{U}_3(\tilde{v}, \tau) = \tilde{U}_3(\tilde{v}) = v_0'(0) = 0, \\ \tilde{U}_4(\tilde{v}, \tau) = \tilde{U}_4(\tilde{v}) = v_0(0) = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Pour  $r = 0$ , l'espace  $W_{2,U}^0$  sera défini par :

$$\begin{aligned} W_{2,U}^0 &= \left\{ \tilde{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)^\top \in W_2^3(0, 1) \oplus W_2^2(0, 1) \oplus W_2^1(0, 1) \oplus L^2(0, 1), \right. \\ &\quad \left. \tilde{U}_j(H^k \tilde{v}) = 0 \quad 1 \leq j \leq 4, \text{ pour } 0 \leq k \leq n + r - 2 = 2 \right. \\ &\quad \left. \text{et l'ordre de toutes les conditions au bord } \leq 2 - k \right\} \\ &= \left\{ \tilde{v} \in W_2^3(0, 1) \oplus W_2^2(0, 1) \oplus W_2^1(0, 1) \oplus L^2(0, 1), \right. \\ &\quad \left. v_0'(0) = 0, v_0(0) = 0, v_1'(0) = 0, v_1(0) = 0, v_2(0) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

L'opérateur  $H_0$  dans ce cas, est défini dans  $W_{2,U}^0$  par :

$$H_0 \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -v_0'''' \end{bmatrix} \text{ et } D(H_0) = W_{2,U}^1.$$

L'espace  $W_{2,U}^1$  ( $r = 1$ ) sera défini par :

$$\begin{aligned} W_{2,U}^1 &= \left\{ \tilde{v} \in W_2^4(0, 1) \oplus W_2^3(0, 1) \oplus W_2^2(0, 1) \oplus W_2^1(0, 1), \right. \\ &\quad \left. v_0'''(1) = 0, v_0''(1) + kv_2'(1) = 0, v_0'(0) = 0, v_0(0) = 0, \right. \\ &\quad \left. v_1'(0) = 0, v_1(0) = 0, v_2'(0) = 0, v_2(0) = 0, v_3(0) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Le problème (4.3) est fortement régulier (voir Paragr. 5). De plus toutes les conditions au bord sont d'ordre  $\leq n + r - 1 = 3$ . D'après le corollaire 3.2 [17], l'opérateur  $H_0$  a donc un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de  $W_{2,U}^0$ .

Par le même argument que dans le cas où la masse est non nulle, l'opérateur  $H_0^2$  a un système fondamental de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de  $W_{2,U}^0$ .

On veut obtenir maintenant une base de Riesz pour l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

L'opérateur  $H_0^2$  se décompose en une somme directe de deux opérateurs,  $H_1$  et  $H_2$  tels que  $H_1$  opère sur  $v_1$  et  $v_3$  et  $H_2$  opère sur  $v_0$  et  $v_2$ .



On pose  $H_0^2 = H_1 \oplus H_2$ , où  $H_1$  est l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} H_1 \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v \\ -w'''' \end{bmatrix}, \\ D(H_1) &= \left\{ \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \in W_2^4(0, 1) \oplus W_2^2(0, 1)/w''(1) + kv'(1) = 0, w''''(1) = 0, \right. \\ &\quad \left. w'(0) = 0, w(0) = 0, v'(0) = 0, v(0) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, w \in H^4(0, 1) \cap \mathcal{V}, v \in \mathcal{V}, w_{xxx}(1) = 0, w_{xx}(1) = -kv'(1) \right\}. \end{aligned}$$

Remarquons que  $H_1$  n'est autre que l'opérateur  $\mathcal{A}$ .

On a montré que l'opérateur  $H_0^2$  a un système de vecteurs propres généralisés qui forme une base de Riesz de  $W_{2,U}^0$ .

On en déduit que le taux optimal de décroissance de l'énergie pour le système (4.1) associé à l'opérateur  $\mathcal{A} = H_1$  est donné par le spectre de  $H_0^2$ . La preuve de ce résultat est donnée à la fin du paragraphe 3.3 dans le cas où la masse est non nulle. Elle est identique ici.

## 5. RÉGULARITÉ FORTE

### 5.1. Cas où la masse est non nulle

Rappelons que le déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  est donné par

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= \tau^8 \left\{ e^{i\tau\sqrt{2}} \left[ -2k + 2i\sqrt{2}(k-1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] \right. \\ &\quad + e^{-i\tau\sqrt{2}} \left[ -2k + 2i\sqrt{2}(1-k)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] \\ &\quad + e^{\tau\sqrt{2}} \left[ -2k - 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] \\ &\quad \left. + e^{-\tau\sqrt{2}} \left[ -2k + 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] + 8(k - k\tau^{-2}) \right\}. \end{aligned}$$

**Lemme 5.1.**  $\tau$  est racine du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  si et seulement si  $f(\tilde{\tau}) = 0$ , avec  $\tilde{\tau} = \omega\tau$ ,  $f(\tilde{\tau}) = \cosh \tilde{\tau} \cos \tilde{\tau}(1 + ik\tilde{\tau}^2) - (ik\tilde{\tau}^2 - k) + \sinh \tilde{\tau} \cos \tilde{\tau}(ik\tilde{\tau} - \tilde{\tau}) + \cosh \tilde{\tau} \sin \tilde{\tau}(ik\tilde{\tau} + \tilde{\tau})$  et  $\omega = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ .

*Démonstration.* Dans ce qui suit, on prend  $\omega = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ . La démonstration est la même pour  $\omega = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ .

Supposons que  $\tau$  est racine du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$ . Donc :

$$\begin{aligned} &\left\{ e^{i\tau\sqrt{2}} \left[ -2k + 2i\sqrt{2}(k-1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] + e^{-i\tau\sqrt{2}} \left[ -2k + 2i\sqrt{2}(1-k)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] \right. \\ &\quad + e^{\tau\sqrt{2}} \left[ -2k - 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] + e^{-\tau\sqrt{2}} \left[ -2k + 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1} - 2\tau^{-2} \right] \\ &\quad \left. + 8(k - k\tau^{-2}) \right\} = 0, \end{aligned}$$

ou encore :

$$2i\sqrt{2}(k-1)\tau^{-1}(e^{i\tau\sqrt{2}} - e^{-i\tau\sqrt{2}}) - 2\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1}(e^{\tau\sqrt{2}} - e^{-\tau\sqrt{2}}) \\ + (-2k - 2\tau^{-2})(e^{i\tau\sqrt{2}} + e^{-i\tau\sqrt{2}} + e^{\tau\sqrt{2}} + e^{-\tau\sqrt{2}}) + 8(k - k\tau^{-2}) = 0.$$

Ce qui donne :

$$-2k(4\cos\omega\tau\cosh\omega\tau - 4) - 2\tau^{-2}(4\cos\omega\tau\cosh\omega\tau + 4k) \\ - 4\sqrt{2}(k-1)\tau^{-1}\sin\tau\sqrt{2} - 4\sqrt{2}(k+1)\tau^{-1}\sinh\tau\sqrt{2} = 0.$$

On obtient :

$$-2k(\cos\omega\tau\cosh\omega\tau - 1) - 2\tau^{-2}(\cos\omega\tau\cosh\omega\tau + k) \\ - \sqrt{2}k\tau^{-1}(\sin\tau\sqrt{2} + \sinh\tau\sqrt{2}) + \sqrt{2}\tau^{-1}(\sin\tau\sqrt{2} - \sinh\tau\sqrt{2}) = 0.$$

Ce qui implique :

$$k\tau^2(\cos\omega\tau\cosh\omega\tau - 1) + (\cos\omega\tau\cosh\omega\tau + k) + ik\omega\tau(\sinh\omega\tau\cos\omega\tau \\ + \cosh\omega\tau\sin\omega\tau) + \omega\tau(\sinh\omega\tau\cos\omega\tau - \cosh\omega\tau\sin\omega\tau) = 0.$$

D'où  $\tilde{\tau} = \omega\tau$  satisfait l'équation :

$$f(\tilde{\tau}) = \cosh\tilde{\tau}\cos\tilde{\tau}(1 + ik\tilde{\tau}^2) - (ik\tilde{\tau}^2 - k) + \sinh\tilde{\tau}\cos\tilde{\tau}(ik\tilde{\tau} + \tilde{\tau}) + \cosh\tilde{\tau}\sin\tilde{\tau}(ik\tilde{\tau} - \tilde{\tau}) = 0.$$

De la même façon, si  $\tilde{\tau}$  satisfait cette équation, alors  $\tau$  est racine du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$ .

On a déjà montré au paragraphe 3.1 que les racines du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  sont asymptotiquement séparées. Montrons qu'elles sont aussi asymptotiquement simples, ce qui établit la régularité forte des conditions aux bords de (3.4) qui est une condition nécessaire pour appliquer le théorème 3.1 de [17].

Le développement asymptotique des racines du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  est le suivant :

$$\tau_n = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(n + \frac{1}{2}\right) + i\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(n + \frac{1}{2}\right) + i\frac{(k+1)}{\sqrt{2}k\pi n} + \frac{(k-1)}{\sqrt{2}k\pi n} - \frac{(k+1)^2}{\sqrt{2}k^2\pi^2 n^2} \\ - i\frac{(k+1)^2}{\sqrt{2}k^2\pi^2 n^2} + \frac{(1-k^2+2k)}{2\sqrt{2}k\pi n^2} + i\frac{(1-k^2-2k)}{2\sqrt{2}k\pi n^2}.$$

D'où :

$$\tilde{\tau}_n = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\pi n} - \frac{(1+k^2)}{k^2\pi^2 n^2} + \frac{(1-k^2)}{2k\pi n^2} + i\left(\frac{1}{k\pi n} - \frac{1}{\pi n^2}\right), \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

On pose  $m = n + \frac{1}{2}$ , et on arrête le développement asymptotique à l'ordre 1. Donc  $\tilde{\tau}_n$  s'écrit :

$$\tilde{\tau}_n = m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) + iO\left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrons que ces racines sont asymptotiquement simples et séparées.

Supposons que pour une infinité d'entiers  $n$ ,  $f'(\tilde{\tau}_n)$  s'annule en même temps que  $f(\tilde{\tau}_n)$ .

On obtient :

$$f'(\tilde{\tau}_n) = ik\tilde{\tau}_n^2(\cos \tilde{\tau}_n \sinh \tilde{\tau}_n - \cosh \tilde{\tau}_n \sin \tilde{\tau}_n) + ik(\cos \tilde{\tau}_n \sinh \tilde{\tau}_n + \cosh \tilde{\tau}_n \sin \tilde{\tau}_n) + ik\tilde{\tau}_n(4 \cosh \tilde{\tau}_n \cos \tilde{\tau}_n - 2) - 2\tilde{\tau}_n \sinh \tilde{\tau}_n \sin \tilde{\tau}_n - 2(\cosh \tilde{\tau}_n \sin \tilde{\tau}_n - \sinh \tilde{\tau}_n \cos \tilde{\tau}_n) = 0.$$

On a :

$$\begin{cases} \cos \tau_n \simeq -O\left(\frac{1}{n}\right) - iO\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sin \tau_n \simeq \pm 1, \\ \cosh \tau_n \simeq \cosh m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi, \\ \sinh \tau_n \simeq \sinh m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi. \end{cases}$$

On suppose que  $n$  est pair. Le cas  $n$  impair se fait de la même manière. En substituant les expressions ci-dessus dans l'équation  $f'(\tilde{\tau}_n) = 0$ , elle devient :

$$ik \left[ m^2\pi^2 + 2m\pi O\left(\frac{1}{n}\right) + 2im\pi O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \left[ -O\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi - iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi - \cosh m\pi - O\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi - iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi \right] + ik \left[ -O\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi - iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi + \cosh m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi \right] + ik \left[ m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) + iO\left(\frac{1}{n}\right) \right] \left[ -4O\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi - 4iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi - 2 \right] - 2 \left[ m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) + iO\left(\frac{1}{n}\right) \right] \left[ \sinh m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi \right] - 2 \left[ \cosh m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi \right] = 0.$$

Un calcul direct nous donne :

$$\begin{cases} -2 \sinh m\pi m\pi - 2 \cosh m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \\ k \cosh m\pi - km^2\pi^2 \cosh m\pi - 2km\pi = 0. \end{cases}$$

Ce qui est impossible, car dans les deux équations les termes dominants tendent vers l'infini. Les racines de  $\Delta$  sont asymptotiquement simples.

### 5.2. Cas où la masse est nulle

Le déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  est défini par :

$$\Delta(\tau) = \tau^7 \left\{ e^{i\tau\sqrt{2}}(2i\sqrt{2}k - 2\tau^{-1}) - e^{-i\tau\sqrt{2}}(2i\sqrt{2}k + 2\tau^{-1}) - e^{\tau\sqrt{2}}(2\sqrt{2}k + 2\tau^{-1}) + e^{-\tau\sqrt{2}}(2\sqrt{2}k - 2\tau^{-1}) - 8\tau^{-1} \right\}.$$

**Lemme 5.2.**  $\tau$  est racine du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  si et seulement si  $f(\tilde{\tau}) = 0$ , avec  $\tilde{\tau} = \omega\tau$ ,  $f(\tilde{\tau}) = (1 + \cosh \tilde{\tau} \cos \tilde{\tau}) + ik\tilde{\tau}(\sinh \tilde{\tau} \cos \tilde{\tau} + \cosh \tilde{\tau} \sin \tilde{\tau})$  et  $\omega = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ .

*Démonstration.* Dans ce qui suit, on prend  $\omega = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ . La démonstration est la même pour  $\omega = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ .

Supposons que  $f(\tilde{\tau}) = 0$ , ou encore :

$$(1 + \cosh \omega\tau \cos \omega\tau) + ik\omega\tau(\sinh \omega\tau \cos \omega\tau + \cosh \omega\tau \sin \omega\tau) = 0. \tag{5.1}$$

On a :

$$\begin{aligned} \cos \omega\tau \cosh \omega\tau &= \frac{1}{4} \left[ e^{\sqrt{2}\tau} + e^{i\sqrt{2}\tau} + e^{-i\sqrt{2}\tau} + e^{-\sqrt{2}\tau} \right] \\ \sinh \omega\tau \cos \omega\tau &= \frac{1}{4} \left[ e^{\sqrt{2}\tau} + e^{-i\sqrt{2}\tau} - e^{i\sqrt{2}\tau} - e^{-\sqrt{2}\tau} \right] \\ \cosh \omega\tau \sin \omega\tau &= -\frac{i}{4} \left[ e^{\sqrt{2}\tau} - e^{-i\sqrt{2}\tau} + e^{i\sqrt{2}\tau} - e^{-\sqrt{2}\tau} \right] \end{aligned}$$

l'équation (5.1) devient

$$\begin{aligned} e^{i\tau\sqrt{2}}[-1 + k\omega\tau(i - 1)] + e^{-i\tau\sqrt{2}}[-1 + k\omega\tau(1 - i)] \\ + e^{\sqrt{2}\tau}[-1 + k\omega\tau(-i - 1)] + e^{-\sqrt{2}\tau}[-1 + k\omega\tau(1 + i)] - 4 = 0. \end{aligned}$$

Donc  $\tau$  est racine de l'équation

$$e^{i\tau\sqrt{2}}[-2\tau^{-1} + 2i\sqrt{2}k] + e^{-i\tau\sqrt{2}}[-2\tau^{-1} - 2i\sqrt{2}k] + e^{\sqrt{2}\tau}[-2\tau^{-1} - 2\sqrt{2}k] + e^{-\sqrt{2}\tau}[-2\tau^{-1} + 2\sqrt{2}k] - 8\tau^{-1} = 0.$$

D'où  $\tau$  est racine du déterminant caractéristique  $\Delta$ .

De la même façon, si  $\tau$  est racine du déterminant caractéristique  $\Delta$ , alors  $f(\tilde{\tau}) = 0$ .

Maintenant, on montre que les racines du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  sont asymptotiquement simples et séparées, ce qui établit la régularité forte des conditions aux bords de (4.3).

Le développement asymptotique des racines du déterminant caractéristique  $\Delta(\tau)$  donné dans [14] est le suivant :

$$\tilde{\tau}_n = m\pi + \frac{i}{2\pi kn} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{5.2}$$

où  $m = n - \frac{1}{4}$ , et  $n \in \mathbb{N}$ .

Montrons que ces racines sont asymptotiquement simples et séparées.

Supposons que pour une infinité d'entiers  $n$ ,  $f'(\tilde{\tau}_n)$  s'annule en même temps que  $f(\tilde{\tau}_n)$ .

On obtient

$$-(1 + ik) \sinh \tilde{\tau}_n \cos \tilde{\tau}_n + (1 - ik) \cosh \tilde{\tau}_n \sin \tilde{\tau}_n - 2ik\tilde{\tau}_n \cosh \tilde{\tau}_n \cos \tilde{\tau}_n = 0. \tag{5.3}$$

On suppose que  $n$  est pair. Le cas  $n$  impair se traite de la même manière.

On note

$$\begin{cases} A = \Re e \tilde{\tau}_n = m\pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \simeq m\pi, \\ B = \Im m \tilde{\tau}_n \simeq \frac{C_k}{n} \simeq O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{avec } C_k = \frac{1}{2\pi k}, \\ \cosh \tilde{\tau}_n \simeq \cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi, \quad \sinh \tilde{\tau}_n \simeq \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi, \\ \cos \tilde{\tau}_n \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} - iO\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sin \tilde{\tau}_n \simeq -\frac{\sqrt{2}}{2} + iO\left(\frac{1}{n}\right). \end{cases}$$

L'équation (5.3) devient

$$\begin{aligned} & -(1+ik) \left( \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - iO\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ & + (1-ik) \left( \cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi \right) \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + iO\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ & - 2ik \left( m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left( \cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - iO\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} & -(1+ik) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin hm\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi \right) \\ & + (1-ik) \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos hm\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi \right) \\ & - 2ik \left( m\pi \cosh m\pi + im\pi O\left(\frac{1}{n}\right) \sin hm\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cos hm\pi \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - iO\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} & -(1+ik) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi \right) \\ & + (1-ik) \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \cosh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi \right) \\ & - 2ikm\pi \frac{\sqrt{2}}{2} \cosh m\pi - i \left( c\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \cosh m\pi + ic\pi \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh m\pi \\ & + O\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi + iO\left(\frac{1}{n}\right) (\sinh m\pi + \cosh m\pi) = 0, \end{aligned}$$

où  $c$  est une constante.

D'où

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} \sinh m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \sinh m\pi - \frac{\sqrt{2}}{2} \cosh m\pi \\ -2kc\pi \cos hm\pi + kc\pi \sqrt{2} \sinh m\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \cos hm\pi = 0, \\ O\left(\frac{1}{n}\right) (\sinh m\pi + \cosh m\pi) - k \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh m\pi \\ + k \frac{\sqrt{2}}{2} \cosh m\pi - km\pi \sqrt{2} \cos hm\pi = 0. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2} + ck\pi\sqrt{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \sinh m\pi + \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2} - 2ck\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \cosh m\pi = 0, \\ \left[ -k\frac{\sqrt{2}}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \sinh m\pi + \left[ k\frac{\sqrt{2}}{2} - km\pi\sqrt{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \cosh m\pi = 0. \end{cases}$$

Ce qui est impossible, puisque  $[k\frac{\sqrt{2}}{2} - km\pi\sqrt{2}]$  est non nul.

Donc les racines de  $\Delta(\tau)$  sont asymptotiquement simples.

Par ailleurs, il est clair qu'elles sont asymptotiquement séparées. En effet, d'après (5.2) on a :

$$\begin{aligned} \Re \tau_n &= m\pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ |\Re \tau_{n+1} - \Re \tau_n| &= \left| (m+1)\pi + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) - \left(m\pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \right| \\ &= \left| \pi + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right|. \end{aligned}$$

Donc quand  $n$  tend vers l'infini,  $|\Re \tau_{n+1} - \Re \tau_n| > \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

### 6. RÉSULTATS DE STABILITÉ UNIFORME ET NON UNIFORME

• **Cas d'un contrôle moment et d'un contrôle force**

Soit le système donné par les équations suivantes ( $m = 1, J = 0$ )

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < 1 & t \geq 0, \\ u_{tt}(1, t) - u_{xxx}(1, t) = -k_1 u_t(1, t) & & t \geq 0, \\ u_{xx}(1, t) = -k_2 u_{xt}(1, t) & & t \geq 0, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 & & t \geq 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

L'énergie du système est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 (u_t)^2 dx + \int_0^1 (u_{xx})^2 dx + u_t^2(1, t) \right].$$

Un calcul direct donne

$$\frac{d}{dt} E(t) = -k_1 u_t^2(1, t) - k_2 u_{xt}^2(1, t).$$

L'espace d'énergie  $\mathcal{H}$  est

$$\mathcal{H} = \{ (u, v, \eta)^\top \in H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R}, u(0) = u_x(0) = 0 \}$$

muni du produit scalaire

$$\langle (u, v, \eta), (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta}) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (u_{xx} \tilde{u}_{xx} + v \tilde{v}) dx + \eta \tilde{\eta},$$

où  $U = (u, v, \eta)^\top$  et  $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta})^\top \in \mathcal{H}$ .

On définit l'opérateur linéaire  $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}$  par

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(u, v, \eta)^\top \in H^4(0, 1) \times H^2(0, 1) \times \mathbb{R}, u_{xx}(1) + k_2 v_x(1) = 0, \eta = v(1), u(0) = u_x(0) = 0, v(0) = v_x(0) = 0\},$$

$$\mathcal{A}U = (v, -u_{xxxx}, u_{xxx}(1) - k_1 v(1))^\top, \text{ avec } U = (u, v, \eta)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Le système (6.1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{U} = \mathcal{A}U \quad \text{et} \quad U(0) = U_0 \in \mathcal{H},$$

avec  $U = (u, u_t, \eta)^\top$ .

L'opérateur  $\mathcal{A}$  est maximal dissipatif sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , donc  $\mathcal{A}$  est à domaine dense dans  $\mathcal{H}$  et engendre un semi-groupe de contractions  $S_{\mathcal{A}}(t)$ .

**Théorème 6.1.** *Le semi-groupe  $S_{\mathcal{A}}(t)$  est fortement stable.*

*Démonstration.* On montre la stabilité forte des solutions en appliquant le principe d'invariance de LaSalle. Par densité de  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  dans  $\mathcal{H}$ , il suffit de montrer le résultat pour des données initiales dans  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ .

Soit  $U_0 = (u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , il est évident que  $(I + \mathcal{A})^{-1}$  est compact, donc  $\cup_{t \geq 0} S(t)U_0$  est relativement compact. Il reste à montrer que l'ensemble  $\omega$ -limite  $\omega(U_0)$  se réduit à zéro.

Soit  $\tilde{U}_0 \in \omega(U_0) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ . On veut résoudre

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{U}}{dt} + \mathcal{A}\tilde{U} = 0, \\ \tilde{U}(0) = \tilde{U}_0. \end{cases} \tag{6.2}$$

L'énergie étant constante sur l'ensemble  $\omega$ -limite, le système (6.2) devient

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} + \tilde{u}_{xxxx} = 0, \\ \tilde{u}_{tt}(1, t) - \tilde{u}_{xxx}(1, t) = 0, \\ \tilde{u}_{xx}(1, t) = 0, \\ \tilde{u}_t(1, t) = 0, \\ \tilde{u}_{xt}(1, t) = 0, \\ \tilde{u}(0, t) = \tilde{u}_x(0, t) = 0, \end{cases} \tag{6.3}$$

avec  $\tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_0$ , et  $\tilde{u}_t(x, 0) = \tilde{v}_0$ , et  $\tilde{u}_t(1, 0) = \tilde{\eta}_0$ .

En particulier on a  $\tilde{u}_{xxx}(1, t) = 0$  et le fait que  $\tilde{u}$  est identiquement nul découle du résultat d'unicité pour la poutre sans masse avec contrôle force ( $u_{xxx}(1, t) = -ku_t(1, t)$ ).

**Théorème 6.2.** *Le semi-groupe  $S_{\mathcal{A}}(t)$  est uniformément stable.*

*Démonstration.* Le système

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < 1 & t \geq 0, \\ u_{tt}(1, t) - u_{xxx}(1, t) = 0 & & t \geq 0, \\ u_{xx}(1, t) = -k_2 u_{xt}(1, t) & & t \geq 0, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 & & t \geq 0, \end{cases} \tag{6.4}$$

a été étudié par Laouisy [10] qui a montré que ce dernier, qui est une perturbation compacte de (6.1), est uniformément stable. D'après Gibson [6] (Th. 2) le système (6.1) est alors aussi uniformément stable car il est asymptotiquement stable d'après le théorème (6.1).

• **Cas d'un contrôle force uniquement** ( $m = 1, J = 0$ )

Soit le système donné par les équations suivantes

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0 & 0 < x < 1 & t \geq 0, \\ u_{tt}(1, t) - u_{xxx}(1, t) = -k_1 u_t(1, t) & & t \geq 0, \\ u_{xx}(1, t) = 0 & & t \geq 0, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 & & t \geq 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

L'énergie du système est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 u_t^2 dx + \int_0^1 u_{xx}^2 dx + u_t^2(1, t) \right].$$

Un calcul direct donne

$$\frac{d}{dt} E(t) = -k_1 u_t^2(1, t).$$

Soit l'espace  $\mathcal{H}$  donné par

$$\mathcal{H} = \{(u, v, \eta)^\top \in H^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R}, u(0) = u_x(0) = u_{xx}(0) = 0\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle (u, v, \eta), (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta}) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (u_{xx} \tilde{u}_{xx} + v \tilde{v}) dx + \eta \tilde{\eta},$$

où  $U = (u, v, \eta)^\top$  et  $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\eta})^\top \in \mathcal{H}$ .

On définit l'opérateur linéaire  $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{H}$  par

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(u, v, \eta)^\top \in H^4(0, 1) \times H^2(0, 1) \times \mathbb{R}, \eta = v(1), u(0) = u_x(0) = u_{xx}(1) = 0, \\ v(0) = v_x(0) = 0\}.$$

$$\mathcal{A}U = (v, -u_{xxxx}, u_{xxx}(1))^\top, \text{ avec } U = (u, v, \eta)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

$$\mathcal{B}U = (0, 0, -k_1 \eta)^\top, \text{ avec } U = (u, v, \eta)^\top \in \mathcal{H}.$$

Le système (6.5) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} U_t(t) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})U(t), \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (6.6)$$

**Théorème 6.3.** *Le système dynamique (6.5) est fortement stable.*

*Démonstration.* En effet, en utilisant le principe d'invariance de LaSalle, on se ramène à résoudre un problème d'unicité pour un système de la forme

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} = 0, \\ u_{tt}(1, t) - u_{xxx}(1, t) = 0, \\ u_{xx}(1, t) = 0, \\ u_t(1, t) = 0, \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \end{cases}$$



qui est le problème d'unicité à résoudre pour une poutre sans masse avec contrôle force. On sait que le résultat est vrai dans ce cas.

Le système dynamique (6.5) est fortement stable.

**Théorème 6.4.** *Le système dynamique (6.5) n'est pas uniformément stable.*

*Démonstration.* Pour démontrer ce résultat on va utiliser un résultat classique de perturbation compacte [15] qui a déjà été utilisé par Rao [13]. Il est facile de voir que  $\mathcal{A}$  est maximal dissipatif.

Un calcul simple nous donne

$$\langle \mathcal{A}U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = -\langle U, \mathcal{A}\tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}}$$

pour  $U$  et  $\tilde{U}$  dans  $\mathcal{H}$ .

L'opérateur  $\mathcal{A}$  est donc antisymétrique.

L'opérateur  $\mathcal{B}$  est compact de façon évidente.

Le semi-groupe engendré par  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  n'est donc pas uniformément stable. On omet les détails de la preuve (elle est la même que dans [13], on construit un deuxième opérateur compact en "inversant" le temps).

## 7. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Dans le cas de masse nulle, on a calculé les valeurs propres du problème (4.1) en fonction du coefficient de la commande. Les valeurs propres sont données par le système

$$\begin{cases} \phi_{xxxx} + \lambda^2 \phi = 0, \\ \phi_{xxx}(1) = 0, \\ \phi_{xx}(1) + k\lambda \phi_x(1) = 0, \\ \phi(0) = \phi_x(0) = 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

On écrit (7.1) sous forme variationnelle dans l'espace  $\mathcal{V} = \{\phi \in H^2(0, 1), \phi(0) = \phi_x(0) = 0\}$ .

$$\begin{cases} \int_0^1 \phi_{xx} v_{xx} dx + \lambda^2 \int_0^1 \phi v dx + k\lambda \phi_x(1) v_x(1) = 0 \\ \phi \in \mathcal{V}; \forall v \in \mathcal{V}. \end{cases} \quad (7.2)$$

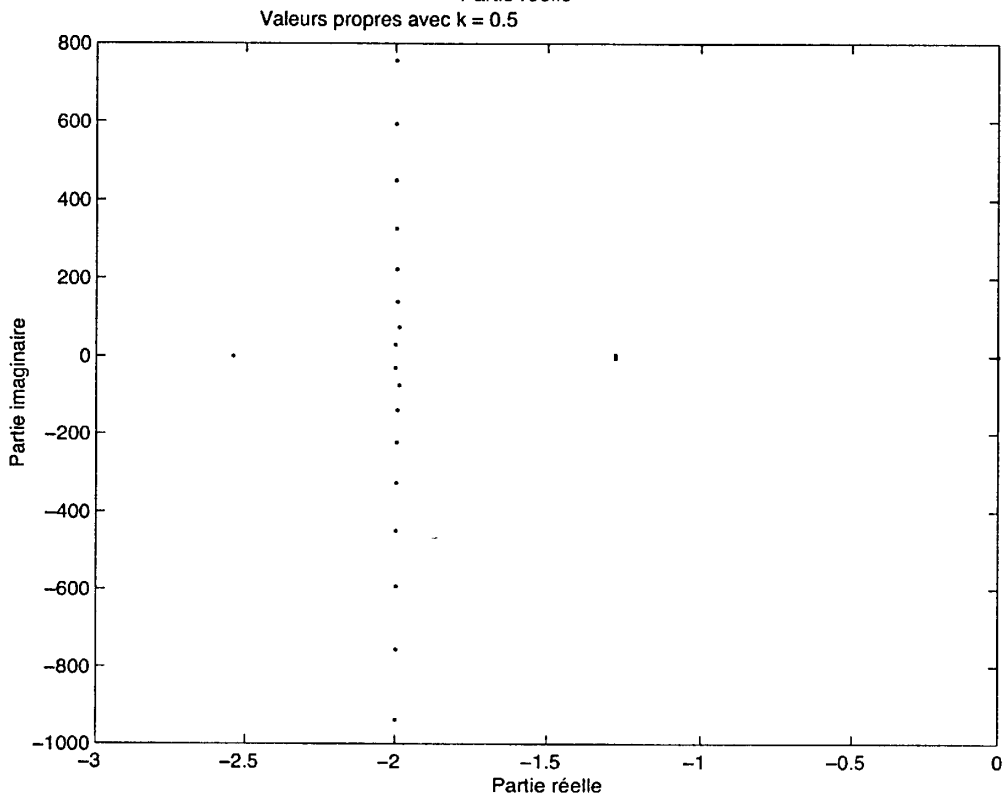
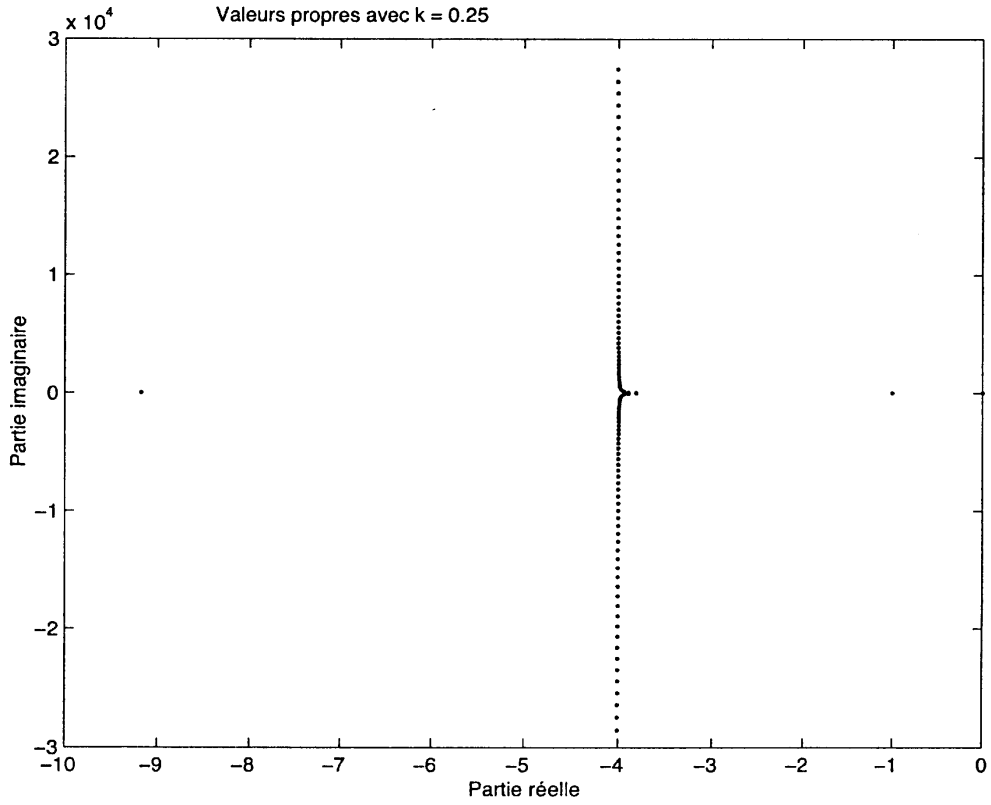
Pour un maillage  $h = \frac{1}{N}$  régulier de  $[0, 1]$  on approche les fonctions de  $\mathcal{V}$  par des fonctions ayant même valeur et même dérivée aux nœuds, avec continuité de la fonction et de sa dérivée aux nœuds. On prend pour cela une base d'Hermite. Pour chaque intervalle on a quatre fonctions de base, sauf pour le premier intervalle où on ne prend que deux fonctions de base pour respecter les conditions d'encastrement. En recollant les fonctions, (7.2) devient un système de  $2N$  équations à  $2N$  inconnues.

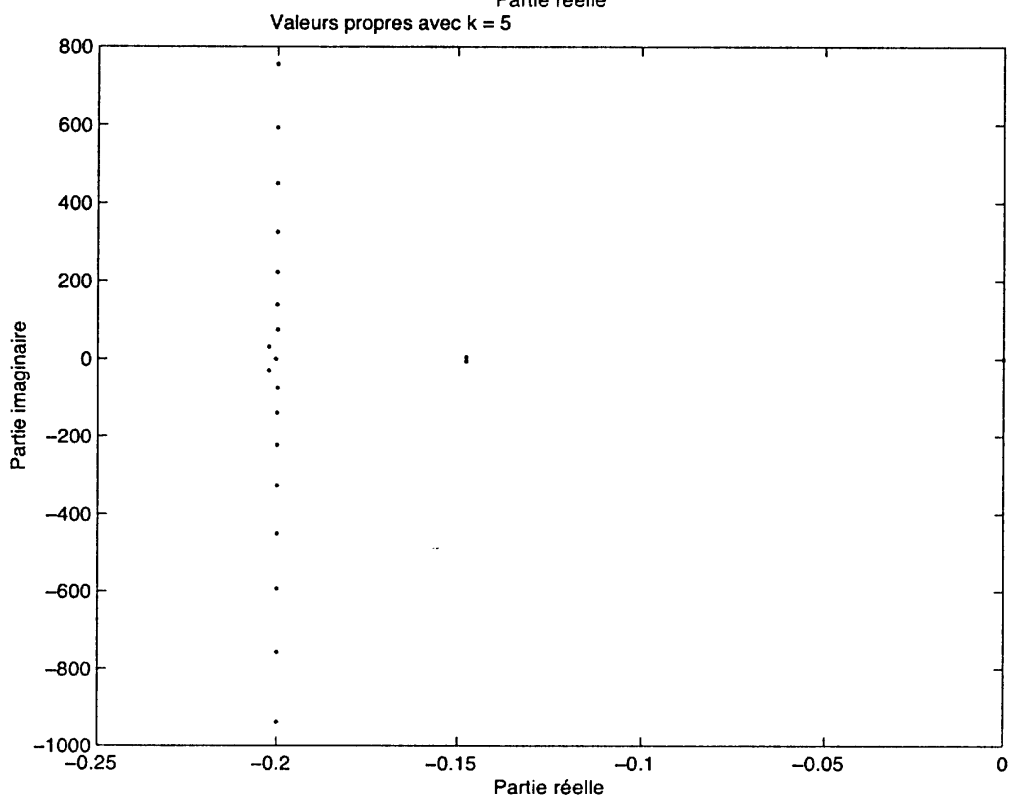
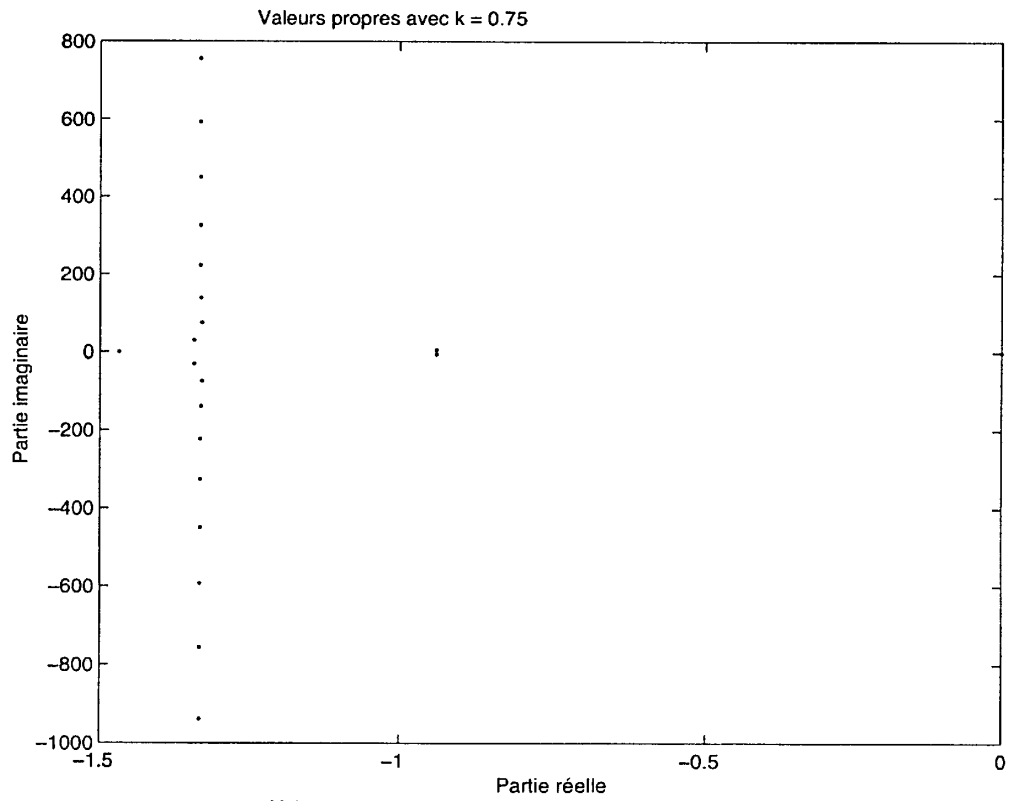
$$(\lambda^2 A + \lambda B + C)\Phi = 0, \text{ avec } \Phi \neq 0 \quad (7.3)$$

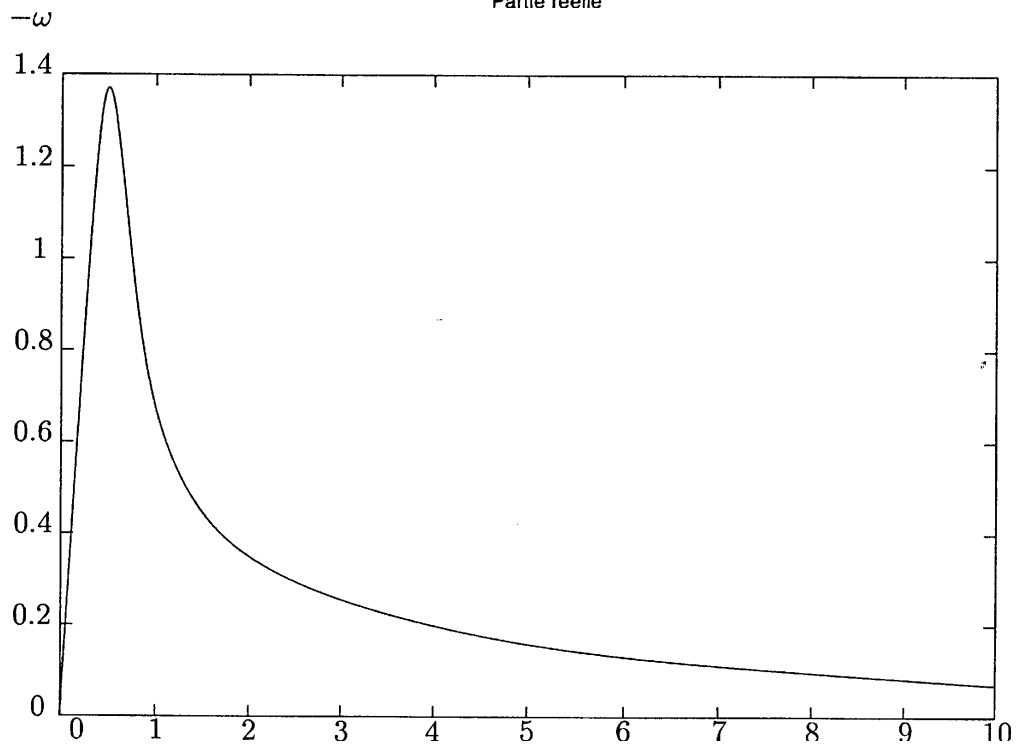
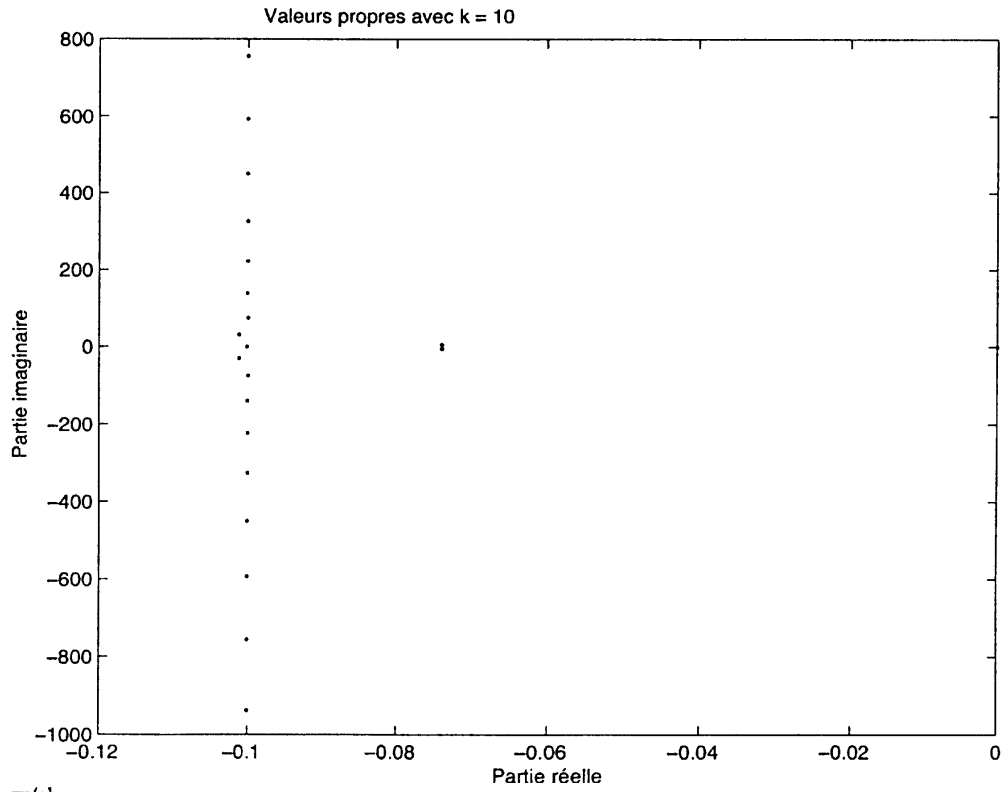
qu'on transforme en un problème de valeurs propres généralisées

$$\mathcal{A}U = \lambda \mathcal{B}U \quad (7.4)$$

de taille  $4N$ . Puis on applique l'algorithme  $QZ$  implanté dans MATLAB. Les figures suivantes ( $N = 100$ ) donnent le spectre pour différentes valeurs de  $k$ , par rapport à l'asymptote connue qui est  $x = -\frac{1}{k}$  (voir [14]).







## CONCLUSION

Le taux optimal de décroissance de l'énergie est en général déterminé par les valeurs propres de basse fréquence (il y en a à droite de l'asymptote).

La variation du taux optimal en fonction de  $k$  apparait sur la dernière figure.

Nous avons bénéficié de nombreux commentaires et remarques des rapporteurs qui ont permis d'améliorer le texte de façon notable. Le deuxième auteur tient à remercier le Centre de Modélisation Mathématique de l'Université du Chili, où une partie de ce travail a été faite.

## RÉFÉRENCES

- [1] L. Chambadal et J.-L. Ovaert, *Cours de mathématiques, Algèbre II*. Gauthier-Villars (1972).
- [2] G. Chen, M.C. Delfour, A.M. Krall et G. Payre, Modeling, stabilization and control of serially connected beams. *SIAM J. Control Optim.* **25** (1987) 526-546.
- [3] G. Chen, S.G. Krantz, D.W. Ma, C.E. Wayne et H.H. West, *The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation*, Operator Methods for Optimal Control Problems, édité par S.J. Lee. Marcel Dekker, New York, *Lecture in Pure Appl. Math. Ser.* (1987) 67-96.
- [4] B. Chentouf, *Contribution à la stabilité et à la stabilisation de systèmes à paramètres répartis*. Thèse de l'Université de Metz (1998).
- [5] F. Conrad et O. Morgül, On the stabilization of a flexible beam with a tip mass. *SIAM J. Control Optim.* **36** (1998) 1962-1986.
- [6] J.S. Gibson, A note on stabilization of infinite dimensional linear oscillators by compact linear feedback. *SIAM J. Control Optim.* **18** (1980) 311-316.
- [7] P. Grabowski, Spectral approach to well-posedness and stability analysis of hybrid feedback systems. *J. Math. Systems Estimation Control* (1996).
- [8] F.L. Huang, Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces. *Ann. Differential Equations* **1** (1985) 43-53.
- [9] R.E. Langer, On the zeros of exponential sums and integrals. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1931) 213-239.
- [10] H. Laouisy, *Sur quelques problèmes de stabilisation de systèmes à paramètres distribués*. Thèse de l'Université de Metz (1997).
- [11] H. Laouisy et B. Chentouf, On the boundary stabilization of a hybrid system, dans 14<sup>th</sup> *IFAC World Congress* (1999).
- [12] W. Littman et L. Markus, Stabilization of a hybrid system of elasticity by feedback boundary damping. *Ann. Mat. Pura Appl.* **152** (1988) 281-330.
- [13] B. Rao, Uniform stabilization of a hybrid system of elasticity. *SIAM J. Control Optim.* **33** (1995) 440-454.
- [14] P. Rideau, *Contrôle d'un assemblage de poutres flexibles par des capteurs-actionneurs ponctuels : étude du spectre du système*, Thèse. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Sophia-Antipolis (1995).
- [15] D.L. Russell, Decay rates for weakly damped systems in Hilbert space obtained with control-theoretic methods. *J. Differential Equations* **19** (1975) 344-370.
- [16] F.Z. Saouri, *Stabilisation d'une poutre avec contrôle force. Étude du taux optimal de décroissance de l'énergie élastique*. Prépublication de l'Institut Elie Cartan, No. 47 (1997).
- [17] A. Shkalikov, Boundary problems for ordinary differential equations with parameter in the boundary conditions. *J. Soviet Math.* **33** (1986) 1311-1342.